



UNIVERSITÉ  
LAVAL

Physique des particules (PHY-3501)

H-2019

---

## Théorie Quantique des Champs

---

Albert DUPONT (111 158 278)

Marianne GRATTON (111 161 246)

# Table des matières

<b>1 Mécanique quantique relativiste (Albert Dupont)</b>	<b>1</b>
1.1 Nombre variable de particules . . . . .	1
1.2 Densité de probabilité négative . . . . .	1
<b>2 Théorie Quantique des Champs (Marianne Gratton)</b>	<b>3</b>
2.1 Théorie Classique des champs (Albert Dupont) . . . . .	4
2.2 Espace de Fock : formalisme à $n$ corps (Marianne Gratton) . . . . .	5
2.3 Champ de Klein-Gordon (Albert Dupont) . . . . .	10
2.4 Représentation d'Heisenberg (Albert Dupont) . . . . .	13
2.5 Champ de Dirac (Albert Dupont) . . . . .	13
<b>3 Causalité en mécanique quantique (Marianne Gratton)</b>	<b>15</b>
3.1 Propagateur en-dehors du cône de lumière . . . . .	15
3.2 Axiomes de Wightman . . . . .	18
<b>4 Invariance CPT (Marianne Gratton)</b>	<b>19</b>

## Introduction (Albert Dupont)

La théorie quantique des champs (QFT) est un cadre théorique consistant en une double quantification de champs classiques. En effet, la première quantification porte sur la promotion des champs généralisés du temps et de la quantité de mouvement en opérateurs. Cela permet d'établir des relations de commutations entre ces quantités à la manière de la mécanique quantique. La seconde quantification ou quantification canonique porte sur le formalisme d'opérateurs de création et d'annihilation dans un champ. Ces derniers permettent la création ou la destruction d'un quanta d'énergie qu'on associera à des particules. Cela permet ainsi de créer un espace vectoriel à  $n$  corps nommé l'espace de Fock. Développée lors du 20e siècle, la QFT est rapidement devenue un des piliers de la physique moderne et de la description des interactions dans l'univers. Malgré tous ses succès, la QFT ne permet toutefois pas d'inclure une théorie de la gravitation telle la relativité générale. Ce sujet demeurera par contre une question pour un autre jour puisqu'il dépasse le cadre de ce qui se veut être une introduction aux concepts de la QFT. La QFT demeure cependant une théorie efficace et élégante permettant d'expliquer intuitivement la dualité ondes-particules ainsi que l'indiscernabilité des particules. Elle a également l'avantage de régler certains problèmes de la mécanique quantique relativiste et autres théories de la mécanique quantique invariante de Poincaré.

## 1 Mécanique quantique relativiste (Albert Dupont)

La mécanique quantique relativiste consiste simplement en une théorie de la mécanique quantique étant covariante de Poincaré. Le groupe de Poincaré est définie comme l'ensemble des isométries de l'espace-temps. Il comprend les translations et rotations dans l'espace-temps, le renversement du temps, la parité ainsi que les transformations de Lorentz (boosts). L'ajout de concepts relativistes à la mécanique quantique n'est cependant pas triviale et mène à plusieurs problèmes. Des exemples seront énoncés ci-dessous.

### 1.1 Nombre variable de particules

La mécanique relativiste n'est pas conçue pour traiter d'un nombre variable de particules. l'équation de Schrödinger est une équation différentielle qui agit sur les degrés de libertés de la fonction d'onde, elle ne permet par contre pas d'en créer. Il est donc possible de décrire séparément les états finaux et initiaux lorsque tous les paramètres sont connus, mais il est impossible de gérer l'apparition ou la disparition d'une particule entre les deux états. C'est problématique puisque de ce fait, plusieurs phénomènes physiques observés expérimentalement ne peuvent être modélisés par la mécanique quantique, comme par exemple la production de paire de particules/antiparticules ou toute réaction de diffusion (interaction entres particules) à un nombre de particules variables.

### 1.2 Densité de probabilité négative

Un des problèmes associés à la mécanique quantique relativiste est l'apparition d'une densité de probabilité négative. En effet, prenons pour point de départ l'équation de Klein-Gordon indépendante du temps

$$(-\nabla^2 + m^2)\psi = E^2\psi,$$

avec comme solutions générales des ondes planes

$$\psi \propto e^{-i(E^+t - \mathbf{p}\cdot\mathbf{r})} = e^{-ip_\mu x^\mu} \quad \text{et} \quad \psi \propto e^{-i(E^-t - \mathbf{p}\cdot\mathbf{r})},$$

avec  $E^\pm = \pm\sqrt{p^2 + m^2}$ . On remarque immédiatement que l'équation possède des solutions d'énergie négatives ce qui est mauvais signe puisque cela n'admet pas d'énergie minimale. Cela permettrait en effet à la matière de se désintégrer perpétuellement puisqu'un système à la recherche de l'équilibre n'atteindrait jamais une énergie minimale. On peut maintenant associer aux fonctions d'ondes un courant de probabilité  $j^\mu$

$$j^\mu = \frac{1}{2mi} [\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*].$$

Cette expression doit respecter l'équation de continuité

$$\frac{d}{dt} \rho + \nabla \cdot j = 0 \quad \text{avec} \quad \rho = \psi^* \psi.$$

On peut donc interpréter  $j^0$  comme une densité de probabilité

$$j^0 = \frac{i}{2m} \left[ \psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial t} \psi^* \right].$$

Puisque l'équation de Klein-Gordon admet des solutions négatives, cette densité peut donc l'être également. Une probabilité négative n'a absolument aucun sens peu importe le point de vue. Pour remédier à ce problème, Dirac a tenté d'introduire une nouvelle équation différentielle compatible avec la relativité restreinte. Cette équation porte désormais le nom d'équation de Dirac. Elle consiste en quelque sorte à ré-écrire l'équation de Klein-Gordon mais en prenant sa racine carrée. L'équation de Dirac indépendante du temps est donc

$$-i\alpha \cdot \nabla \psi + \alpha_4 m \psi = E \psi$$

où  $\alpha$  et  $\alpha_4$  seront mieux définis dans la section détaillant les solutions de la théorie quantique des champs pour l'équation de Dirac. Le calcul pour obtenir le courant de probabilité est particulièrement laborieux, seul le résultat sera présenté. De ce fait, il est possible de voir que la quantité

$$j^0 = \psi^\dagger \psi$$

est strictement positive. Notre problème avec l'équation de Klein-Gordon est donc réglé quant à la densité de probabilité négative obtenue. On pousse l'analyse de l'équation de Dirac un peu plus loin pour trouver la forme des solutions générales ainsi que des énergies associées pour voir si des solutions d'énergie négative sont toujours présentes.

L'équation de Dirac possède comme solutions générales

$$\psi \propto \omega e^{-i(Et - p \cdot r)} = \omega e^{-ip_\mu x^\mu}$$

où  $\omega$  représente un vecteur à 4 composantes.

$$\omega^+ = \begin{bmatrix} \xi \\ \frac{\sigma \cdot p}{E^+ + m} \xi \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \omega^- = \begin{bmatrix} -\frac{\sigma \cdot p}{E^- + m} \chi \\ \chi \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad E^\pm = \pm\sqrt{p^2 + m^2}$$

Comme l'équation de Klein-Gordon, l'équation de Dirac admet également des solutions d'énergies négatives. Les solutions négatives peuvent être interprétées comme des anti-particules. En effet, un positron d'énergie positive peut être vu comme un électron d'énergie négative se déplaçant à rebours dans le temps. Par contre, l'existence d'énergies négatives mène toujours à la question suivante : comment la matière peut-elle atteindre un état stable s'il n'existe pas un niveau minimal d'énergie? Pour y répondre, Dirac a introduit le concept de *mer de Dirac*, où tous les états d'énergie négative sont occupés, ce qui empêcherait la désintégration vers ces états par le principe d'exclusion de Pauli. Il serait possible de créer un trou dans la mer de Dirac lors de l'absorption de photon. Ce trou serait alors interprété comme un positron.

Cela mène cependant à d'autres problèmes conceptuels, comme par exemple une charge du vide infinie. Malgré nos meilleurs efforts, il semble que nous tournons en rond. Chaque solution pour régler un problème de la théorie de mécanique quantique relativiste ne fait qu'en amener un autre. C'est à ce moment qu'intervient la théorie quantique des champs, qui permet de fusionner un peu plus la relativité restreinte et la mécanique quantique.

## 2 Théorie Quantique des Champs (Marianne Gratton)

Le succès de la théorie quantique des champs repose sur son explication de certains éléments ne pouvant pas être expliqués par le modèle standard. Pour comprendre ces phénomènes, il est par contre pertinent d'effleurer les principes sur lesquels se basent la théorie. Elle se base d'abord sur quelques postulats de symétrie, comme l'invariance de jauge et l'invariance de Lorentz, par exemple. La QFT est également une théorie locale, c'est-à-dire que les prédictions concernant les comportements et les interactions des particules en un point ne nécessite que la connaissance des fonctions d'onde et de leur dérivée en ce point précis.

La plus grande différence avec les modèles précédents est ce qu'on appelle la deuxième quantification, ou quantification canonique. En effet, la mécanique quantique relativiste considère les particules comme des quanta d'énergie mais considère encore les champs extérieurs, comme le champ électromagnétique, de manière classique (spectre d'énergie continu). L'étape suivante, donc la seconde quantification, est de considérer le champ électromagnétique comme un champ quantique. Le concept est poussé plus loin dans la théorie quantique des champs en remplaçant la particule ponctuelle par un champ quantique, plus précisément par une excitation discrète de ce champ. Ainsi, il existe autant de différents champs qu'il existe de types de particules.

Cette interprétation en termes de champs quantiques permet d'aborder des propriétés fondamentales des particules qui ne pouvaient être tout à fait bien expliquées avant. D'abord, la QFT s'adapte bien à la dualité onde-particule en considérant à la fois les particules comme des champs, donc des ondes, mais dont les excitations quantifiées représentent la nature discrète des particules. De plus, la nature indiscernable des particules est elle aussi expliquée. Deux particules de même nature, comme deux électrons, ont exactement les mêmes propriétés car ce sont deux excitations du même champ.

De ce fait, l'équation de Schrodinger est alors plutôt considérée comme une équation d'onde, écrite, pour une particule libre, telle que

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\nabla}{2m}\right) \psi(\vec{x}, t) = 0$$

où  $\psi$  est toujours une fonction d'onde complexe, mais qui est considérée comme étant un champ. L'action associée serait alors la suivante

$$S = \int dt d\vec{x} \psi^\dagger \left(i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\nabla}{2m}\right) \psi(\vec{x}, t).$$

Précédemment, l'action classique était plutôt définie de sorte que

$$S = \int dt L(t).$$

Le lagrangien associé au champ est donc la quantité suivante

$$L(t) = \int d\vec{x} \psi^\dagger \left(i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\nabla}{2m}\right) \psi(\vec{x}, t) = \int d\vec{x} \mathcal{L}(\vec{x}, t)$$

où  $\mathcal{L}(\vec{x}, t)$  est appelée densité lagrangienne, puisque le lagrangien est obtenu en intégrant cette quantité sur tout l'espace. C'est plutôt sur cette densité qu'est basée la théorie quantique des champs. À l'image du lagrangien, les fonctions d'ondes obtenues sont plutôt considérées comme des densités de fonctions d'onde et leur momentum, comme une densité de quantité de mouvement. Les champs sont alors quantifiés en définissant les relations de commutations appropriées entre les différents opérateurs.

Les champs permettent également de traiter des systèmes possédant un nombre de particules variable. L'hamiltonien (ou le lagrangien) ne dépend effectivement plus de la particule elle-même mais du champ qui la représente. Il est donc possible d'exprimer le lagrangien du champ sans avoir à ajouter de l'information sur le nombre de particules présentes. Le traitement de ce genre de problèmes à  $N$  particules est basé sur une généralisation de l'espace d'Hilbert utilisé en mécanique quantique et sur les opérateurs de l'espace de Fock, qui permettent d'annihiler et de créer différentes particules à partir de l'état du vide.

## 2.1 Théorie Classique des champs (Albert Dupont)

Un champ consiste simplement en une quantité qui est définie en tout point de l'espace-temps. Une valeur quelconque est associée à chacun de ces points. Pour un champ comme un potentiel électrique, le champ retourne une valeur scalaire. Après quelques modifications pour adapter les équations, cette approche permet d'analyser des systèmes dynamiques de manière semblable à la mécanique classique.

On commence par définir une position généralisée qui est représentée par un champ. Ceci est analogue aux coordonnées généralisées en mécanique classique

$$q(t) \rightarrow \phi(x).$$

Pour un champ scalaire  $\phi(x)$ , les lois de transformations sont telles que

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x)$$

où

$$\Lambda^\mu_\rho \eta^{\rho\sigma} \Lambda^\nu_\sigma = \eta^{\mu\nu}$$

L'objectif est naturellement de trouver les équations du mouvement pour une densité lagrangienne donnée. Il est possible de trouver ces trajectoires en appliquant le principe de moindre action. De

$$\frac{\delta S}{\delta \phi(x)},$$

il est possible d'obtenir que

$$\partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = 0.$$

Il est également possible de traduire le théorème de Noether vers une application utile pour une théorie des champs. En effet, toute symétrie de l'action continue implique un courant conservé  $j^\mu(x)$ . La conservation du courant indique que  $\frac{dj^\mu(x)}{dt} = 0$ . Il est ensuite naturel d'essayer de trouver une charge  $Q$  conservée associée à ce courant,

$$Q = \int d^3x j^0 \implies \frac{dQ}{dt} = \int d^3x \frac{dj^0}{dt} = - \int d^3x \nabla \cdot j = 0.$$

Une transformation correspond bien à une symétrie si les équations du mouvement demeurent les mêmes. On considère une transformation arbitraire  $\delta\phi$

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\mu (\delta \phi) \\ &= \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right). \end{aligned}$$

Si les équations du mouvement sont respectées, le premier terme est nécessairement nul. De plus, si  $\delta\phi$  est une symétrie, on doit nécessairement avoir

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \Delta \phi \right) = \partial_\mu F^\mu(\phi).$$

On retrouve que  $\partial_\mu F^\mu(\phi) = 0$  si  $j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Delta(\phi) - F^\mu(\phi)$ . Où  $\delta\phi = \Delta(\phi)$  et  $\delta\mathcal{L} = \partial_\mu F^\mu(\phi)$ . Nous avons ainsi retrouvé une expression pour le courant conservé sous une transformation de symétrie de l'action.

L'approche utilisée jusqu'à maintenant était celle lagrangienne. En effet, celle-ci est explicitement invariante de Lorentz en mécanique classique

$$L = p\dot{q} - H.$$

On substitue  $p = \gamma mv$ ,  $\dot{q} = v$  et  $H = \gamma mc^2$ , on a alors

$$L = \gamma mv^2 - \gamma mc^2 = \gamma mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = -\frac{mc^2}{\gamma}.$$

L'action est donnée par  $\int L dt$

$$\implies L = - \int \frac{mc^2}{\gamma} dt.$$

Puisque  $d\tau = \frac{dt}{\gamma}$ , on a

$$S = - \int mc^2 d\tau,$$

ce qui implique clairement que cette approche est invariante de Lorentz. Considérons maintenant l'approche hamiltonienne de la mécanique classique. On débute par définir  $\pi(x)$  à partir du lagrangien, soit la densité de quantité de mouvement

$$\pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)}$$

ainsi que la densité hamiltonienne  $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H} = \pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{L} \implies H = \int d^3x \mathcal{H}.$$

Il est également possible d'obtenir les équations du mouvement à partir de l'approche hamiltonienne. En effet, les équations d'hamilton indiquent que

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial \pi(x, t)},$$

$$\dot{\pi}(x, t) = -\frac{\partial H}{\partial \phi(x, t)}.$$

Ces variables sont dites *canoniques*.

## 2.2 Espace de Fock : formalisme à n corps (Marianne Gratton)

Afin de traiter les problèmes à  $n$  corps, il est nécessaire de généraliser le concept de fonction d'onde à une particule. Le formalisme associé à ce traitement est appelée seconde quantification. Plus formellement, l'espace d'Hilbert à  $n$  particules est défini à partir de celui pour une seule particule à l'aide d'un produit tensoriel

$$\mathbb{H}^n = \bigotimes_{i=1}^n \mathbb{H}$$

avec  $\mathbb{H}^0 = \mathbb{C}$ , où  $\mathbb{H}^0$  représente l'état du vide, aussi dénoté  $|0\rangle$ .

Pour alléger la notation, on remplace vite les  $\otimes$  par de simples virgules. Le produit scalaire est alors généralisé de la manière suivante

$$\langle u_1, u_2, \dots, u_n | v_1, v_2, \dots, v_n \rangle = \langle u_1 | v_1 \rangle \langle u_2 | v_2 \rangle \dots \langle u_n | v_n \rangle.$$

Pour créer un espace où les différents systèmes à  $n$  particules peuvent interagir, on fait la somme directe de tous les  $n$  espaces d'Hilbert

$$\Gamma_f(\mathbb{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbb{H}^n.$$

Cet espace est appelée l'espace de Fock libre (free Fock space) puisqu'il décrit l'ensemble créé par toutes les possibilités de systèmes à  $n$  corps sans imposer de contrainte particulière. Par contre, puisque les systèmes de particules décrits comprennent des objets indiscernables, il est nécessaire de symétriser ou d'antisymétriser les espaces  $\mathbb{H}^n$ . De ce fait, pour les bosons, on utilise plutôt le produit tensoriel symétrique, définit tel que

$$u_1 \circ \dots \circ u_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} u_{\sigma(1)} \otimes u_{\sigma(n)}$$

où  $S_n$  est le groupe des permutations de  $n$  nombres. On somme donc sur toutes les façons possibles d'ordonner les termes et on divise par  $1/n!$ , le nombre de permutations totale, pour normaliser. Une permutation quelconque  $\sigma$  permute les éléments d'une suite de nombre. Par exemple, pour une suite de 4 nombres (1234), une permutation possible serait  $\sigma = (1432)$  où 1 est envoyé vers 4, 4 vers 3, 3 vers 2 et 2 vers 1. On a donc  $\sigma(1234) = 2341$ . On peut également définir la même permutation telle que

$$\sigma(1) = 2 \quad \sigma(2) = 3 \quad \sigma(3) = 4 \quad \sigma(4) = 1$$

d'où la notation utilisée dans l'équation du produit tensoriel symétrique.

Pour le produit antisymétrique, l'expression est plutôt

$$u_1 \wedge \dots \wedge u_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) u_{\sigma(1)} \otimes u_{\sigma(n)}$$

où  $\text{sgn}(\sigma)$  est le signe de la permutation. En effet, il existe deux types de permutation. La permutation cyclique décale les indices sans modifier l'ordre initial, en envoyant par exemple 1234 vers 4123, 3412 ou 2341. Ce type de permutation est de signe positif. Une permutation qui change l'ordre des éléments est dite acyclique et son signe est négatif. Par contre, on peut obtenir un signe positif en faisant deux permutations acycliques consécutives.

Les produits scalaires de ces deux espaces doivent par contre être redéfinis eux aussi, pour tenir compte du facteur  $1/n!$  qui apparaît dans la symétrisation (ou antisymétrisation). Pour le produit antisymétrique, on a que

$$\langle u_1 \wedge \dots \wedge u_n | v_1 \wedge \dots \wedge v_n \rangle = \frac{1}{(n!)^2} \sum_{\sigma, \tau \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau) \langle u_{\sigma(1)} | v_{\tau(1)} \rangle \dots \langle u_{\sigma(n)} | v_{\tau(n)} \rangle$$

qui peut être réduit à

$$\langle u_1 \wedge \dots \wedge u_n | v_1 \wedge \dots \wedge v_n \rangle = \frac{1}{n!} \det(\langle u_i | u_j \rangle)_{ij}.$$

On redéfinit donc le produit scalaire pour faire disparaître le facteur  $1/n!$

$$\langle u_1 \wedge \dots \wedge u_n | v_1 \wedge \dots \wedge v_n \rangle_{\wedge} = \det(\langle u_i | u_j \rangle)_{ij}.$$

De même, le produit scalaire symétrique est redéfini de sorte que

$$\langle u_1 \circ \dots \circ u_n | v_1 \circ \dots \circ v_n \rangle_{\circ} = \text{perm}(\langle u_i | u_j \rangle)_{ij}$$



où perm est le permanent de la matrice, c'est-à-dire l'équivalent du déterminant, mais sans considérer les signes négatifs.

Deux nouveaux espaces d'Hilbert à  $n$  particules, muni du bon produit scalaire, peuvent alors être dérivés, de la même manière que précédemment :

$$\mathbb{H}^{\circ n} = \bigcirc_{i=1}^n \mathbb{H}, \quad \mathbb{H}^{\wedge n} = \bigwedge_{i=1}^n \mathbb{H}.$$

Cette notation fantaisiste sert simplement à illustrer que le produit tensoriel, symétrique ou antisymétrique, est appliqué sur une série d'espace d'Hilbert à une particule, à l'image de la définition précédente de  $\mathbb{H}^n$ .

Les espaces de Fock correspondant sont ensuite construits :

$$\Gamma_s(\mathbb{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbb{H}^{\circ n}, \quad \Gamma_a(\mathbb{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbb{H}^{\wedge n}.$$

L'allure des fonctions d'ondes de ces espaces sera développée plus tard. Ils seront simplement dénotés  $|\phi\rangle$  ici. Il est par contre pertinent de définir les opérateurs de création et d'annihilation qui agissent sur cet espace. Pour l'espace symétrique, les opérateurs bosoniques sont

$$a^\dagger(u) : \mathbb{H}^{\circ n} \rightarrow \mathbb{H}^{\circ n+1}, \quad u_1 \circ \dots \circ u_n \mapsto u \circ u_1 \circ \dots \circ u_n, \quad a(u) : \mathbb{H}^{\circ n} \rightarrow \mathbb{H}^{\circ n-1}, \quad u_1 \circ \dots \circ u_n \mapsto \sum_{i=1}^n \langle u|u \rangle u_1 \circ \dots \circ \hat{u}_i \circ \dots \circ u_n.$$

De même, on a les opérateurs bosoniques pour l'espace antisymétrique

$$b^\dagger(u) : \mathbb{H}^{\wedge n} \rightarrow \mathbb{H}^{\wedge n+1}, \quad u_1 \wedge \dots \wedge u_n \mapsto u \wedge u_1 \wedge \dots \wedge u_n, \quad b(u) : \mathbb{H}^{\wedge n} \rightarrow \mathbb{H}^{\wedge n-1}, \quad u_1 \wedge \dots \wedge u_n \mapsto \sum_{i=1}^n (-1)^i \langle u|u \rangle u_1 \wedge \dots \wedge \hat{u}_i \wedge \dots \wedge u_n.$$

Moins formellement, ces opérateurs agissent sur l'état du vide tels que

$$a^\dagger(u) |0\rangle = b^\dagger(u) |0\rangle = u, \quad a(u) |0\rangle = b(u) |0\rangle = 0.$$

Ils agissent également sur un état  $|\phi\rangle$  de sorte que

$$a^\dagger(u_i) |\phi\rangle = a^\dagger(u_i) |u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n\rangle = \sqrt{n_i} |u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_n\rangle, \\ a(u_i) |\phi\rangle = a(u_i) |u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_n\rangle = \sqrt{n_i} |u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n\rangle,$$

où  $n_i$  est le nombre de particules dans l'état  $u_i$ . Il est donc maintenant possible de passer d'un espace à  $n$  particules à un espace à  $n+1$  particules, ou à un espace à  $n-1$  particules, permettant ainsi que traiter des problèmes un nombre variable de particules. L'opérateur  $a^\dagger(u_i)$  peut également être noté  $a_i^\dagger$ . La même notation s'applique à l'opérateur d'annihilation. Ces deux opérateurs représentent ceux qui crée où annihile l'état  $i$  et cette notation sera réutilisée dans les sections suivantes.

Tous les autres opérateurs de ces espaces peuvent être exprimés en fonction des opérateurs de création et d'annihilation. Par exemple, l'opérateur de nombre est défini tel que

$$\hat{N} \equiv a^\dagger(u)a(u).$$

Comme son nom l'indique, la valeur propre de l'opérateur de nombre indique le nombre de particules présentes dans un état quelconque  $|\phi\rangle$

$$\hat{N} |\phi\rangle = n |\phi\rangle.$$

On a en effet que

$$\begin{aligned}\hat{N}_i |\phi\rangle &= a^\dagger(u_i) a(u_i) |u_1, \dots, u_{i-1}, u_i u_{i+1}, \dots, u_n\rangle \\ &= \sqrt{n_i} a(u_i) |u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n\rangle \\ &= \sqrt{n_i} \sqrt{n_i} a^\dagger(u_i) a(u_i) |u_1, \dots, u_{i-1}, u_i u_{i+1}, \dots, u_n\rangle \\ &= n_i |\phi\rangle.\end{aligned}$$

Il est également possible de définir les règles de commutation et d'anticommutation suivantes :

$$\begin{aligned}[a^\dagger(u), a^\dagger(v)] &= [a(u), a(v)] = 0, & [a(u), a^\dagger(v)] &= \langle u|v\rangle I, \\ \{b^\dagger(u), b^\dagger(v)\} &= \{b(u), b(v)\} = 0, & \{b(u), b^\dagger(v)\} &= \langle u|v\rangle I.\end{aligned}$$

Ces relations sont cohérentes avec le principe d'exclusion de Pauli. En effet, avec la relation d'anticommutation pour  $b$ , on a que

$$\{b^\dagger(u), b^\dagger(v)\} = 0 \implies \{b^\dagger(u), b^\dagger(u)\} = 2b^\dagger(u) = 0.$$

Rappelons que  $b$  est l'opérateur de création fermionique et qu'il ajoute un état  $u$  système quantique présent. De ce fait, il est impossible d'appliquer deux fois un même état  $u$  à un système quantique de fermions, comme le suggère le principe d'exclusion de Pauli.

Un exemple plus concret d'une fonction d'onde antisymétrique à  $n$  particules est le déterminant de Slater, défini tel que

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \psi_1(\vec{x}_1) & \dots & \psi_n(\vec{x}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_n(\vec{x}_1) & \dots & \psi_n(\vec{x}_n) \end{vmatrix}$$

où  $\psi_i$  représente la fonction d'onde d'un état  $i$  du système et  $\vec{x}_i$ , le vecteur représentant une particule  $i$  et ses caractéristiques physiques. Le déterminant de Slater représente donc la fonction d'onde d'un état de  $n$  fermions dans  $n$  états différents. Le déterminant antisymétrise le produit des  $n$  fonctions d'ondes, à l'image de la définition de l'espace d'Hilbert antisymétrique à  $n$  particules. Le facteur  $1/\sqrt{N!}$  est présent pour normaliser la fonction d'onde résultante, en supposant que les  $\psi_i$  soient orthonormées. Il y a en effet,  $N!$  termes lorsque le déterminant est développé. Pour la version symétrique, l'équivalent est le permanent de Slater, qui est plutôt défini en terme du permanent de la matrice définie plus tôt.

Un autre exemple plus concret serait l'application de l'opérateur de nombre sur un état symétrique de bosons, défini tel que

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \psi^\dagger(\vec{x}_1) \dots \psi^\dagger(\vec{x}_n) |0\rangle.$$

Cette représentation sera explicitée lors de la résolution de l'équation de Klein-Gordon. Ici, les fonctions d'ondes  $\psi(x)^\dagger$  et  $\psi(x)$  jouent le rôle des opérateurs de création et d'annihilation. Les commutateurs dans cette représentation sont donc les suivants

$$[\psi(\vec{x}), \psi^\dagger(\vec{y})] = -[\psi^\dagger(\vec{y}), \psi(\vec{x})] = \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad [\psi(\vec{x}), \psi(\vec{y})] = [\psi^\dagger(\vec{x}), \psi^\dagger(\vec{y})] = 0.$$

L'opérateur de nombre dans cette représentation est

$$N = \int d\vec{x} \psi^\dagger(\vec{x}) \psi(\vec{x}).$$

On peut ainsi calculer les commutateurs suivants :

$$[N\psi(\vec{x})] = \int d\vec{y}[\psi^\dagger(\vec{x})\psi(\vec{y}), \psi(\vec{x})] = \int d\vec{y}[-\delta(\vec{y} - \vec{x})]\psi(\vec{y}) = -\psi(\vec{x}),$$

$$[N\psi^\dagger(\vec{x})] = \int d\vec{y}[\psi^\dagger(\vec{x})\psi(\vec{y}), \psi^\dagger(\vec{x})] = \int d\vec{y}\psi^\dagger(\vec{y})\delta(\vec{y} - \vec{x}) = \psi^\dagger(\vec{x}).$$

On se sert ici de l'identité suivante :

$$[ab, c] = a[b, c] + [a, c]b.$$

Donc, pour la première expression, on a

$$[\psi^\dagger(\vec{x})\psi(\vec{y}), \psi(\vec{x})] = \psi^\dagger(\vec{x})[\psi(\vec{y}), \psi(\vec{x})] + [\psi^\dagger(\vec{x}), \psi(\vec{x})]\psi(\vec{y}).$$

Le premier commutateur est nul puisqu'il implique deux fonctions  $\psi$  sans complexe conjugué. En utilisant la définition de  $[\psi^\dagger(\vec{x}), \psi(\vec{x})]$  et en utilisant  $\delta(-x) = \delta(x)$ , on obtient bien que

$$[\psi^\dagger(\vec{x})\psi(\vec{y}), \psi(\vec{x})] = -\delta(\vec{y} - \vec{x})\psi(\vec{y}).$$

De même, pour la deuxième expression, on a alors que

$$[\psi^\dagger(\vec{x})\psi(\vec{y}), \psi^\dagger(\vec{x})] = \psi^\dagger(\vec{x})[\psi(\vec{y}), \psi^\dagger(\vec{x})] + [\psi^\dagger(\vec{x}), \psi^\dagger(\vec{x})]\psi(\vec{y}).$$

De par leur définition, seul le premier commutateur est non nul et on a bien

$$[\psi^\dagger(\vec{x})\psi(\vec{y}), \psi^\dagger(\vec{x})] = \psi^\dagger(\vec{y})\delta(\vec{y} - \vec{x}).$$

Le dernier commutateur peut donc être réécrit tel que

$$[N\psi^\dagger(\vec{x})] = N\psi^\dagger(\vec{x}) - \psi^\dagger(\vec{x})N = \psi^\dagger(\vec{x}) \implies N\psi^\dagger(\vec{x}) = \psi^\dagger(\vec{x})(N + 1).$$

Ensuite, la valeur propre de l'opérateur de nombre appliqué sur l'état du vide est nulle puisque l'état du vide ne contient aucune particule. Cette condition est traduite par

$$N|0\rangle = 0.$$

Toutes ces informations permettent de confirmer que l'opérateur de nombre donne bien le nombre de particules présent dans un état. En effet, on a que

$$N|\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}N\psi^\dagger(\vec{x}_1)\dots\psi^\dagger(\vec{x}_n)|0\rangle.$$

De part l'équation pour  $N\psi^\dagger(\vec{x})$ , pour passer  $N$  à travers une fonction, il faut lui ajouter 1. De ce fait, après avoir permuté  $N$  avec les  $n$  fonctions, on a

$$N|\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}\psi^\dagger(\vec{x}_1)\dots\psi^\dagger(\vec{x}_n)(N + n)|0\rangle.$$

Puisque l'action de  $N$  sur  $|0\rangle$  rend sa contribution nulle, on a bien que

$$N|\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\rangle = n|\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\rangle.$$

### 2.3 Champ de Klein-Gordon (Albert Dupont)

On peut maintenant appliquer ces concepts pour le champ de Klein-Gordon. À partir de la densité lagrangienne suivante

$$\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 = 0.$$

Il est possible de se servir de l'équation d'Euler-Lagrange pour retrouver les équations du mouvement. En substituant ce champ dans l'équation d'Euler-Lagrange, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\partial_\mu\left[\frac{\partial(\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - m^2\phi^2)}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right] - \frac{1}{2}\frac{\partial(\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - m^2\phi^2)}{\partial\phi} &= 0 \\ \implies (\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\phi &= 0, \end{aligned}$$

ce qui correspond à l'équation de Klein-Gordon. On écrit la transformée de Fourier des coordonnées généralisées

$$\phi(t, x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{ip\cdot x} \phi(t, p).$$

En substituant ce terme dans l'équation de Klein-Gordon, on trouve comme solution

$$\phi(t, p) = A(p)e^{iE_p t} + B(p)e^{-iE_p t} \quad \text{avec} \quad E_p = \sqrt{p^2 + m^2}.$$

On veut que  $\phi$  soit un champ scalaire réel, ce qui implique que  $\phi = \phi^*$

$$\phi^*(t, x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \phi^*(t, p).$$

On tente désormais de trouver une solution générale pour  $A(p)$  et  $B(p)$ . On pose un changement de variable  $p \rightarrow -p$

$$\implies \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{ip\cdot x} \phi^*(t, -p).$$

À partir de l'équation de l'onde plane obtenue précédemment et de la condition sur les champs, on trouve que  $B(p) = A^*(-p)$ .

$$\phi(t, x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} [A(p)e^{-iE_p t + ip\cdot x} + A^*(-p)e^{iE_p t - ip\cdot x}]$$

On peut ré-écrire le terme exponentiel comme  $e^{ip\cdot x}$  où  $p_0 = E_p$ . Pour la seconde exponentielle, on effectue un second changement de variable de  $p \rightarrow -p$

$$\phi(t, x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} [A(p)e^{-ip\cdot x} + A^*(p)e^{ip\cdot x}].$$

En définissant  $A(p) = \frac{a_p}{2E_p}$  on obtient

$$\phi(t, x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} [a_p e^{-ip\cdot x} + a_p^* e^{ip\cdot x}].$$

Connaissant les relations de commutations entre la quantité de mouvement et la position de la mécanique quantique, on obtient les relations de commutations suivantes pour nos opérateurs

$$[\phi(x), \pi(y)] = i\delta^3(x - y),$$

$$[\phi(x), \phi(y)] = [\pi(x), \pi(y)] = 0.$$

En posant  $t = 0$ , on obtient la solution suivante

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} [a_p e^{-ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{ip \cdot x}].$$

C'est à ce moment que l'on cherche à effectuer la seconde quantification. On détermine que  $a_p$  est un opérateur d'annihilation et que  $a_p^\dagger$  est un opérateur de création. Il est possible de trouver les relations de commutation entre ces opérateurs à partir de leur définition.

$$\begin{aligned} [a_p, a_q] &= 0, \\ [a_p, a_q^\dagger] &= (2\pi)^3 2E_p \delta^3(p - q). \end{aligned}$$

On peut désormais obtenir une expression pour l'hamiltonien en partant d'un densité hamiltonienne.

$$H = \int d^3x [\pi(x) \dot{\phi}(x) - \mathcal{L}] = \int d^3x \mathcal{H}.$$

Avec  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi^2$  et  $\pi(x) = \dot{\phi}(x)$ , on retrouve

$$H = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right].$$

Le premier terme est analogue à l'énergie cinétique, le deuxième à l'énergie potentiel venant du gradient du champ et le troisième terme correspond à l'énergie intrinsèque du champ de Klein-Gordon. Cet hamiltonien demeure cependant purement classique, il faut introduire la première quantification soit transformer les champs en opérateurs. Il sera ensuite possible de trouver les états propres de ce champ. On considère désormais  $\phi(x)$  et  $\pi(x)$  comme des opérateurs. Il est alors naturel de vouloir trouver les relations de commutation entre ces opérateurs.

$$\implies H = \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} E_p (a_p^\dagger a_p + a_p a_p^\dagger)$$

Cette expression est semblable à celle d'une infinité d'oscillateurs harmoniques couplés.

Nous sommes également en mesure d'écrire les opérateurs  $\pi(x)$  et  $\phi(x)$  en termes des opérateurs  $a$  et  $a^\dagger$

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \frac{-i}{(2\pi)^3} \int d^3p \sqrt{\frac{\omega_p}{2}} (a_p e^{ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{-ip \cdot x}), \\ \phi(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} (a_p e^{-i\omega_p t + ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{i\omega_p t - ip \cdot x}). \end{aligned}$$

Ayant trouver une expression pour l'hamiltonien du champ de Klein-Gordon en théorie quantique des champs, il serait maintenant pertinent de s'en servir. On commence par évaluer l'énergie du vide en appliquant cet opérateur sur l'état nul  $|0\rangle$ . Il est important de rappeler que l'opérateur d'annihilation appliqué sur  $|0\rangle$  redonne  $|0\rangle$ , en effet, cela empêche d'obtenir des énergies négatives ce qui aurait des conséquences catastrophiques sur la stabilité de la matière. Par l'équation de Schrodinger, on a que

$$\begin{aligned} H |0\rangle &= E |0\rangle \\ \implies \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} E_p (a_p^\dagger a_p + a_p a_p^\dagger) |0\rangle &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} E_p a_p a_p^\dagger |0\rangle \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3 p E_p \delta(p - q) |0\rangle \rightarrow \infty.$$

Par les relations de commutations définies plus haut, cette expression est proportionnelle à  $\delta(0) = \infty$ . Ce résultat est peu pratique puisqu'il indiquerait une énergie du vide infinie. De plus, cet infini vient du fait que l'espace est également infini, ce qui implique que tout hamiltonien non-nul donnera une énergie infinie. Considérons que l'espace est constitué de boîtes de largeur  $L$  placées de manière périodique.

$$\begin{aligned} (2\pi)^3 \delta(0) &= \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L/2}^{L/2} d^3 x e^{ix \cdot p} \Big|_{p=0} \\ &= \int_{-L/2}^{L/2} d^3 x = V. \end{aligned}$$

La quantité à calculer serait donc la densité d'énergie dans l'état du vide, ce qui donnerait une réponse plus pertinente,

$$\frac{E_0}{V} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} E_p.$$

Ce terme est malheureusement encore infini. Pour cette raison, cet infini est généralement ignoré puisqu'il n'a aucun sens physique. En effet, les mesures expérimentales observent plutôt la différence d'énergie entre deux états. Un moyen de passer au travers de cet infini est de ré-organiser l'ordre dans lequel les opérateurs de création et d'annihilations sont appliqués sur l'état, cette technique se nomme *l'ordre normal*. Cela consiste simplement à placer les opérateurs d'annihilation de manière à ce qu'ils agissent sur le ket avant les opérateurs de création. Ainsi, un état

$$a_p^\dagger a_p a_p^\dagger a_p |0\rangle$$

devient plutôt

$$a_p^\dagger a_p^\dagger a_p a_p |0\rangle.$$

Il faut cependant prendre note que si le champ décrit des fermions, un signe négatif se présentera après le ré-arrangement des opérateurs.

Observons maintenant l'action de l'opérateur  $a_p^\dagger$  sur l'état  $|0\rangle$  ainsi que les relations de commutations de ces opérateurs avec l'hamiltonien,

$$[H, a_p^\dagger] = \omega_p a_p^\dagger, \quad [H, a_p] = -\omega_p a_p.$$

Il est possible de voir que l'action de  $a_p^\dagger$  permet d'ajouter un quanta de  $\omega_p$  d'énergie. Cet opérateur permet ainsi de générer tous les états possibles. Écrivons désormais l'opérateur de quantité de mouvement total  $P$

$$P = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p a_p^\dagger a_p.$$

On voit donc qu'en plus de créer un quanta d'énergie  $\omega_p$ , l'opérateur  $a_p^\dagger$  crée une quantité de mouvement  $p$ . Il est naturel d'associer ces quanta d'énergie et de quantité de mouvement venant de l'excitation du champ à des particules. De ce fait, cela permet d'expliquer l'indiscernabilité des particules en mécanique quantique. De plus, en considérant un état à 2 particules tel que

$$a_p^\dagger a_q^\dagger |0\rangle.$$

En sachant que  $a_p^\dagger$  et  $a_q^\dagger$  commutent, les deux opérateurs peuvent être échangés,

$$a_p^\dagger a_q^\dagger |0\rangle = a_q^\dagger a_p^\dagger |0\rangle.$$

Puisque le champ de Klein-Gordon peut être excité autant de fois que désiré (il n'existe aucun niveau d'énergie maximale) et que rien ne nous empêche de placer autant de particules que voulu dans un état quelconque, cela nous permet de conclure que le champ de Klein-Gordon s'applique aux bosons. Ceci explique également la décomposition utilisée pour les bosons dans la section précédente, lors du traitement de l'opérateur de nombre.

Le passage d'une théorie classique des champs à la théorie quantique des champs se fait donc relativement facilement au travers de quelques étapes de quantification. La première consiste à obtenir une forme pour la densité lagrangienne du système. Il n'existe aucun moyen spécifique pour obtenir cette quantité, on se contente généralement d'utiliser des densités lagrangiennes connues, comme celle de Klein-Gordon ou de Dirac. La première quantification est ensuite effectuée, elle consiste à transformer nos champs en opérateurs. La deuxième quantification est ensuite appliquée, cette quantification introduit des opérateurs de création et d'annihilation au champ, permettant de créer de modifier les niveaux d'énergie en appliquant ces derniers sur un état. On peut ensuite trouver une forme pour l'hamiltonien en termes de ces opérateurs de création et d'annihilation de manière à calculer les états et énergies propres du système à l'aide de l'équation de Schrodinger.

## 2.4 Représentation d'Heisenberg (Albert Dupont)

Il est parfois plus simple de se servir de l'interprétation d'Heisenberg de la mécanique quantique. En effet, dans la représentation habituelle de Schrodinger, les opérateurs sont indépendants du temps et c'est plutôt l'état du système quantique qui évolue. La représentation d'Heisenberg adopte le point de vue opposé, dans lequel les opérateurs sont dynamiques et les états stables.

$$|\psi_H\rangle \equiv |\psi_S(t_0)\rangle = [U(t, t_0)]^{-1} |\psi_S(t)\rangle \implies |\psi_S(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi_H\rangle,$$

où  $U(t, t_0)$  est l'opérateur d'évolution temporelle défini plus tard. Puisque les deux représentations sont reliées par une transformation unitaire, la valeur moyenne calculée dans une représentation ou dans l'autre demeure inchangée.

$$\langle A \rangle = \langle \psi_S(t_0) | A_S | \psi_S(t_0) \rangle = \langle \psi_H | [U(t, t_0)]^{-1} A_S U(t, t_0) | \psi_H \rangle = \langle \psi_H | A_H | \psi_H \rangle.$$

On peut donc écrire

$$a_p(t) = e^{iHt} a_p e^{-iHt}$$

Il est possible d'effectuer un développement en série des fonctions d'opérateurs pour obtenir

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2}[A[A, B]] + \dots$$

Notre expression précédente de l'opérateur d'annihilation devient donc

$$a_p(t) = e^{-iE_p t} a_p.$$

Pour l'opérateur de création, on a

$$a_p^\dagger(t) = e^{iE_p t} a_p^\dagger.$$

Dans cette représentation, pour un temps égal, les relations de commutations entre les opérateurs demeurent les mêmes.

## 2.5 Champ de Dirac (Albert Dupont)

On part de la densité lagrangienne suivante :

$$\bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi.$$

Comme pour l'équation de Klein-Gordon, on substitue cette expression dans l'équation d'Euler-Lagrange pour obtenir

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0,$$

ce qui correspond à l'équation de Dirac. Les matrices  $\gamma$  sont construites à partir des matrices de Pauli, qui décrivent le spin des particules. En effet, elles ont la forme suivante :

$$\gamma^0 = \sigma_3 \otimes I \quad \text{et} \quad \gamma^i = i\sigma^2 \otimes \sigma^i$$

avec

$$\sigma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Comme pour le champ de Klein-Gordon, il est possible de définir des densités de quantité de mouvement tel que

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = i\bar{\psi}\gamma^0.$$

On peut cependant définir

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0 \implies \psi^\dagger = \bar{\psi} \gamma^0.$$

On aura donc

$$\pi(x) = i\psi^\dagger.$$

La quantité de mouvement canonique conjuguée à  $\psi$  est donc  $i\psi^\dagger$ , ce qui donne l'hamiltonien suivant

$$H = \int d^3x \bar{\psi} (-i\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla + m) \psi.$$

En substituant  $\bar{\psi}$  par  $\gamma^0 \psi^\dagger$  on obtient

$$H = \int d^3x \psi^\dagger (-i\gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla + \gamma^0 m) \psi$$

Cette expression a la particularité de ne pas dépendre explicitement des dérivées temporelles de  $\psi$ . On peut développer cette expression en faisant le développement des modes de Fourier tel que

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega_p} (\psi_+ e(p) e^{-ip \cdot x} + \psi_-(p) e^{ip \cdot x}) \quad \text{avec} \quad \omega_p = \sqrt{p^2 + m^2} \equiv p_0.$$

En termes de  $\psi_\pm$ , l'équation de Dirac devient

$$(p_0 \gamma_0 - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} \pm m) \psi_\pm(p) = 0.$$

À partir de ce résultat, il est possible de voir que l'action de  $\psi_\pm$  crée un quantum d'énergie  $\pm \omega_p$ . On peut associer cette excitation du champ à la création d'une particule dans le champ de Dirac. On fait ensuite le changement de variable suivant

$$\psi_\pm(p) = (\pm \not{p} + m) \phi.$$

On obtient alors

$$(\not{p} \mp m)(\pm \not{p} + m) \phi = \pm(p^2 - m^2) \phi = 0.$$

Cette équation a des solutions non-triviales seulement pour  $p^2 = m^2$ . Pour un état de quantité de mouvement nulle, on a

$$\psi_\pm(p_0, \mathbf{p} = 0) = (\pm p_0 \gamma_0 + m) \phi$$

où  $\phi$  est un spineur à 4 dimensions. On pose que ce spineur est un état propre de  $\gamma_0$ . À partir de la définition de  $\gamma_0$ , on conclut que

$$u^1(m, 0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad u^2(m, 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$



avec comme valeur propre +1

$$\gamma_0 u^i(m, 0) = u^\sigma(m, 0) \quad \text{avec } \sigma \in \{1, 2\}.$$

Inversement, les spineurs

$$v^1(m, 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v^2(m, 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

auront une valeur propre -1 telle que

$$\gamma_0 v^\sigma(m, 0) = -v^\sigma(m, 0).$$

On définit finalement les spineurs en 2 dimensions  $\phi^i(m, 0)$

$$\phi^1(m, 0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \phi^2(m, 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dont on se sert pour exprimer la solution finale

$$\psi_+(p) = u^\sigma(p) = \frac{p + m}{\sqrt{2m(p_0 + m)}} u^\sigma(m, 0) = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{p_0 + m}{2m}} \phi^\sigma(m, 0) \\ \frac{\sigma \cdot p}{\sqrt{2m(p_0 + m)}} \phi^\sigma(m, 0) \end{bmatrix},$$

$$\psi_-(p) = v^\sigma(p) = \frac{-p + m}{\sqrt{2m(p_0 + m)}} v^\sigma(m, 0) = \begin{bmatrix} \frac{\sigma \cdot p}{\sqrt{2m(p_0 + m)}} \phi^\sigma(m, 0) \\ \sqrt{\frac{p_0 + m}{2m}} \phi^\sigma(m, 0) \end{bmatrix}.$$

On voit que  $\psi_+$  a pour solution  $+p_0 = \sqrt{p^2 + m^2}$  et que  $\psi_-$  a pour solution  $-p_0 = -\sqrt{p^2 + m^2}$ .

On peut ainsi ré-écrire l'opérateur de position généralisée et l'hamiltonien en termes d'opérateurs de création et d'annihilation.

$$\psi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{m}{p_0} (a_{\sigma,+}(p) u_+^\sigma(p) e^{-ip \cdot x} + a_{\sigma,-}(p) v_-^\sigma(p) e^{ip \cdot x})$$

$$H = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{m}{p_0} \sum_{\sigma=1,2} p_0 [a_{\sigma,+}^\dagger(p) a_{\sigma,+}(p) - a_{\sigma,-}^\dagger(p) a_{\sigma,-}(p)].$$

Ceci implique que les solutions de l'équation de Dirac peuvent prendre des valeurs positives et négatives. Puisque les systèmes créés n'ont pas de limite inférieure d'énergie, il serait possible de placer une infinité de particules dans l'état d'énergie négative ce qui impliquerait une énergie négative infinie. Un moyen de régler ce problème est de forcer les particules à obéir au principe d'exclusion de Pauli. De cette manière, on prévient l'existence d'une énergie négative arbitrairement grande. On conclut donc que les excitations du champ de Dirac permettent de créer des fermions.

### 3 Causalité en mécanique quantique (Marianne Gratton)

#### 3.1 Propagateur en-dehors du cône de lumière

Considérons l'évolution d'un système quantique d'un état  $\psi(x, 0)$  à un autre état  $\psi(x, t)$ . L'équation de Schrodinger est équivalente à l'existence d'un opérateur permettant de déplacer une fonction d'onde dans le temps,

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt} |\psi(0)\rangle.$$

Le propagateur est alors défini comme étant les éléments de matrice de l'opérateur d'évolution temporelle  $U(t, t_0)$  dans la représentation position

$$\langle x | U(t, t_0) | x_0 \rangle = U(x, t, x_0, t_0),$$

en ayant

$$|\psi(x, t)\rangle = \langle x | U(t, t_0) | \psi(t_0) \rangle.$$

De plus,  $U(t, t_0)$  est de la forme

$$U(t, t_0) = e^{-iH(t-t_0)}.$$

Cela permet donc d'évaluer l'état du système quantique et donc les probabilités d'amplitude. Considérons une particule libre classique dans un potentiel nul. Son hamiltonien est de la forme

$$H = \frac{p^2}{2m}.$$

Le propagateur entre un temps initial  $t_0$  et un temps  $t$  est donc

$$U(t) = \langle x | e^{-i\frac{p^2}{2m}t} | x_0 \rangle.$$

En introduisant une relation de fermeture sur l'espace des quantités de mouvement on obtient

$$\begin{aligned} &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \langle x | e^{-i\frac{p^2}{2m}t} | p \rangle \langle p | x_0 \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{-i\frac{p^2}{2m}t} e^{ip \cdot (x-x_0)} \\ &= \left( \frac{m}{2\pi it} \right)^{3/2} e^{\frac{im(x-x_0)^2}{2t}}. \end{aligned}$$

Cette expression est non nulle pour tout  $x \neq x_0$  ainsi que pour tout  $t$ . Cela signifie donc que le propagateur est non nul pour tout l'espace-temps, qui inclut la région en-dehors du cône de lumière. La causalité est donc violée. Le problème vient peut-être du fait que l'hamiltonien utilisé est non relativiste.

Considérons l'énergie d'une particule relativiste.

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2 \implies E = \sqrt{p^2 + m^2}, \quad \text{dans le système d'unités naturelles,}$$

$$\begin{aligned} U(t) &= \langle x | e^{-it\sqrt{p^2+m^2}} | x_0 \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{-it\sqrt{p^2+m^2}} e^{ip \cdot (x-x_0)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 |x-x_0|} \int_0^\infty dp p \sin(p|x-x_0|) e^{-it\sqrt{p^2+m^2}}. \end{aligned}$$

Puisque seul le comportement en-dehors du cône de lumière est d'intérêt pour l'instant, l'intégrale n'est pas résolue explicitement et on observe plutôt le comportement asymptotique dans la limite où  $x^2 \gg t^2$ .

$$U(t) \sim e^{-m\sqrt{x^2-t^2}}.$$

Comme il est possible de le constater, le propagateur est non nul en-dehors du cône de lumière même pour un hamiltonien relativiste. Cela représente un problème puisque cela impliquerait que la mécanique quantique relativiste viole la causalité. Cela correspondrait à une particule voyageant plus vite que la lumière.

Considérons désormais une approche d'un point de vue de théorie quantique des champs. L'amplitude qu'une particule se propage de  $y$  à  $x$  est donnée par

$$\langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle \equiv D(x - y).$$

Les opérateurs  $\phi(i)$  sont des sommes d'opérateurs de création et d'annihilation. L'expression pour l'amplitude se simplifie à

$$D(x - y) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip \cdot (x-y)}$$

puisque seuls les termes en  $\langle 0 | a_p a_q^\dagger | 0 \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(p - q)$  survivent. En effet, les conditions d'orthogonalités impliquent que  $p = q$ , sinon le résultat du produit scalaire sera nul, puisque les états du ket et du bra seront différents.

Considérons d'abord le cas où la différence entre  $x$  et  $y$  est purement temporelle. Cela correspond à un intervalle de type temps.

$$\begin{aligned} D(x - y) &= \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dp \frac{p^2}{2\sqrt{p^2 + m^2}} e^{-it\sqrt{p^2 + m^2}} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_m^\infty dE \sqrt{E^2 - m^2} e^{-iEt} \sim e^{-imt} \text{ lorsque } t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Considérons désormais le cas où  $x - y$  est purement spatial ( $x - y \equiv r$ ).

$$\begin{aligned} D(x - y) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{ip \cdot r} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty dp \frac{p^2}{2E_p} \frac{e^{ipr} - e^{-ipr}}{ipr} = \frac{-i}{8\pi^2 r} \int_{-\infty}^\infty dp \frac{pe^{ipr}}{\sqrt{p^2 + m^2}}. \end{aligned}$$

Cette intégrale peut être évaluée par les méthodes de l'analyse complexe. Il est possible de vérifier que la fonction à intégrer est multiforme et qu'elle possède des points de branchements à  $p = \pm im$ . Puisqu'on cherche à évaluer la fonction sur l'axe réel, il faut faire passer la coupure du plan complexe par l'infini de manière à rejoindre ces deux points.

On obtient

$$D(x - y) = \frac{1}{4\pi^2 r} \int_m^\infty \frac{\rho e^{-\rho r}}{\sqrt{\rho^2 - m^2}} \sim e^{-mr} \text{ avec } r \rightarrow \infty.$$

Encore une fois, l'amplitude est non-nulle. Il semble qu'il n'y ait aucun moyen d'éviter ce résultat troublant. Cela remet cependant en question notre interprétation et analyse de la causalité en mécanique quantique. La propagation en-dehors du cône de lumière n'est pas nécessairement un problème, il faut simplement qu'un événement ne puisse pas en affecter un autre en-dehors du cône de lumière. On peut donc se servir du principe d'incertitude pour voir si les opérateurs utilisés précédemment  $\phi(x)$  et  $\phi(y)$  commutent. Dans le cas où ce commutateur est nul, la mesure de l'un ne peut pas affecter celle de l'autre et chaque opérateur est donc 'indépendant' de l'autre. De façon plus générale, si le commutateur devient nul pour  $(x - y)^2 < 0$ , la causalité est alors respectée. Nous avons donc établi un nouveau critère pour évaluer les liens de causalité en mécanique quantique.

$$\begin{aligned}
[\phi(x), \phi(y)] &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} \times [(a_p e^{-ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{ip \cdot x}), (a_q e^{-iq \cdot y} + a_q^\dagger e^{iq \cdot y})] \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)}) \\
&= D(x-y) - D(y-x).
\end{aligned}$$

Il faut donc que cette quantité soit nulle pour maintenir la causalité telle que définie en relativité restreinte. On conclut donc que malgré le fait que l'amplitude de probabilité puisse être non-nulle en-dehors du cône de lumière, cette quantité n'a aucune valeur physique et peut donc violer la causalité. Le commutateur entre  $\phi(x)$  et  $\phi(y)$  représente le réel lien de causalité en mécanique quantique. Heureusement, ce dernier préserve la causalité et ne permet pas l'échange d'information à une vitesse supérieure à celle de la lumière.

### 3.2 Axiomes de Wightman

Les axiomes de Wightman, formulés au début des années 1950, sont une première tentative visant à bien formaliser la théorie quantique des champs et de la rendre complètement compatible mathématiquement avec la relativité restreinte. Ces axiomes tentent donc de jeter les bases les plus logiques pour décrire ce que devrait respecter une théorie quantique des champs en terme d'invariance sous le groupe de Poincaré, de causalité et de localité. Le groupe de Poincaré est le groupe de toutes les transformations qui préservent l'intervalle d'espace-temps, ce dernier devant demeurer invariant sous une transformation de Lorentz. Les axiomes sont les suivants :

1. Il existe un espace d'Hilbert dans lequel une représentation unitaire du groupe de Poincaré peut agir. Cet axiome sert à assurer une compatibilité entre la théorie des champs et la mécanique relativiste.
2. Le spectre de l'opérateur de d'énergie impulsion, dérivé du groupe de Poincaré, doit être contenu à l'intérieur du cône de lumière. On s'assure ainsi qu'aucune particule ne peut se propager à l'extérieur du cône de lumière.
3. Il existe un état unique qui est invariant par rapport aux translations de l'espace temps du groupe de Poincaré. Cet état est appelé "état du vide" puisque par définition, l'état ne contenant rien doit être partout invariant sous translation de ce groupe. Cette définition signifie aussi qu'il ne peut pas y avoir plusieurs vides quantiques.
4. Les champs quantiques sont une distribution d'opérateurs linéaires sur un domaine  $D$  de l'espace d'Hilbert invariant de Poincaré. L'état du vide doit être contenu dans  $D$ .
5. Les champs se transforment de manière covariante sous les transformations de Poincaré.
6. Pour des séparations de type-espace, les champs doivent soit commuter ou anti-commuter. Cela assure que la causalité n'est pas enfreinte en empêchant deux mesures associées à des opérateurs de type espace-temps d'être reliées.

Il est important de noter que, malgré le fait qu'ils soient nommés axiomes, ce ne sont pas les bases réelles de la théorie actuelle. Ils représentent plutôt l'idée de ce qu'une théorie quantique des champs devrait être selon Wightman. En effet, quoique les axiomes ne soient pas problématiques pour les fonctions d'ondes libres et pour les fonctions d'ondes liées de dimension 2 et 3, aucune preuve n'existe en ce qui concerne une théorie impliquant des fonctions d'onde liées de dimension 4, donc une théorie de l'espace temps tel qu'on le connaît. L'approche implique les fonctions de corrélations à  $n$  points et le domaine de la physique, même plutôt des mathématiques, qui s'intéresse à la version de la QFT qui respecte ces axiomes est appelé la théorie quantique

constructive des champs, ou théorie quantique des champs axiomatique. La compatibilité de la théorie quantique des champs avec tout les axiomes de la relativité restreinte, tels que définis par les axiomes de Wightman, n'est donc pas formellement prouvée.

## 4 Invariance CPT (Marianne Gratton)

Un autre théorème important est le théorème  $CPT$ , qui stipule que l'univers demeure invariant sous la symétrie combinant les opérateurs  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{T}$ . Le théorème  $CPT$  est important puisque, comme l'invariance de Lorentz en relativité générale, cette symétrie n'a encore jamais été violée expérimentalement. Elle serait donc aussi fondamentale que l'invariance de Lorentz, il est donc important qu'une théorie tentant d'expliquer les particules à la base de notre univers soit munie d'une telle symétrie. Définissons d'abord les opérateurs dans le contexte de la théorie quantique des champs. Ce sont tous des opérateurs discrets, c'est-à-dire que leurs valeurs propres sont en nombre fini.

D'abord, la transformation  $\mathcal{P}$  est la transformation de parité. Elle correspond à une réflexion de tout l'espace puisque qu'elle envoie une fonction d'onde  $\psi(t, \vec{x})$  vers  $\psi(t, -\vec{x})$ . C'est une transformation linéaire et unitaire et ses valeurs propres sont  $\pm 1$ . En effet, puisqu'une réflexion revient sur elle-même lorsqu'on l'applique deux fois, on a que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^2 |\psi(t, \vec{x})\rangle &= \eta_p \mathcal{P} |\psi(t, -\vec{x})\rangle = \eta_p^2 |\psi(t, \vec{x})\rangle = |\psi(t, \vec{x})\rangle \\ \implies \eta &= \pm 1. \end{aligned}$$

La valeur propre négative est associée à la fonction propre dite impaire alors que la valeur propre positive est associée à la fonction propre paire. De plus, puisque cette transformation inverse l'espace sans inverser le temps, cet opérateur inverse également la quantité de mouvement. La parité des fermions et des bosons peut être déduite de la théorie quantique des champs. Pour l'équation de Dirac, l'opérateur de parité est en effet la matrice  $\gamma^0$  mentionnée précédemment. En effet, les équations de Dirac pour la particule et l'antiparticule sont respectivement les suivantes

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(t, \vec{x}) = 0 \quad (i\gamma^0 \partial_0 - i\gamma^a \partial_a - m)\psi(t, \vec{x}).$$

L'opérateur de parité envoie  $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$ ,  $\partial_i \rightarrow -\partial_i$ ,  $\gamma^0 \rightarrow \gamma^0$  et  $\gamma^i \rightarrow -\gamma^i$ . On effectue ces changements dans la première équation ce qui donne

$$(i\gamma^0 \partial_0 - i\gamma^a \partial_a - m)\psi(t, -\vec{x}) = 0.$$

On multiplie ensuite par  $\gamma^0$  et, en utilisant la relation d'anticommuation des matrices  $\gamma^\mu$ , on obtient la relation

$$(i\gamma^0 \partial_0 - i\gamma^a \partial_a - m)\gamma^0 \psi(t, -\vec{x}) = 0.$$

On voit donc que, pour que cette expression soit cohérente avec celle pour les antiparticules, la matrice  $\gamma^0$  doit correspondre à l'opérateur de parité. En appliquant l'opérateur, on revient alors à l'équation pour les antiparticules. On a alors

$$\begin{aligned} u^1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & u^2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & v^1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, & v^2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, & \gamma^0 &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}, \\ \implies \gamma^0 u^1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & \gamma^0 u^2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & \gamma^0 v^1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, & \gamma^0 v^2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Cela confirme que les fermions ont une parité paire alors que les antifermions sont impairs. Pour les bosons, la parité est la même pour les particules que pour les antiparticules et celle-ci est impaire.

La conservation de la parité est une loi de conservation multiplicative. En effet, c'est le produit des parités individuelles qui est conservé, pour ne pas que la valeur propre soit autre chose que 1 ou  $-1$ . La symétrie par rapport à la parité est par contre brisée pour les interactions faibles.

L'opérateur suivant est celui de l'inversement du temps. Contrairement à la parité, il correspond, comme son nom l'indique, à l'inversion de la coordonnée temporelle de la fonction d'onde, en envoyant  $t$  vers  $-t$ . De ce fait, la quantité de mouvement est également envoyée vers son opposé. Ce n'est pas un opérateur linéaire, il est plutôt antilinéaire. De plus, comme pour  $\mathcal{P}$ , appliquer deux fois l'opérateur  $T$  est équivalent à multiplier par l'identité. Ses valeurs propres sont donc également  $\pm 1$ . Par contre, puisque l'opérateur est antilinéaire, ces valeurs ne sont pas des observables. Les relations de commutations ne sont pas non plus conservées par l'action de cet opérateur. On remédie à la situation en définissant l'opérateur physique  $\mathcal{T}$  comme la multiplication de  $T$  est d'un autre opérateur antilinéaire. Le produit envoie ainsi  $t \rightarrow -t$ ,  $p \rightarrow -p$  et le nombre imaginaire  $i \rightarrow -i$ .

Finalement, la conjugaison de charge  $\mathcal{C}$  est définie comme l'échange d'une particule pour son antiparticule. L'opérateur inverse donc toutes les charges quantiques (charge, nombre leptonique, nombre baryonique, etc.) et le moment magnétique des particules : la fonction d'onde  $\psi$  est donc envoyée vers  $\bar{\psi}$ . Cette fois-ci,  $\mathcal{C}$  est linéaire et unitaire comme  $\mathcal{P}$  et ses valeurs propres  $\eta_c = \pm 1$  sont donc des observables physiques. Les seuls systèmes qui sont des vecteurs d'état de valeur propre 1 sont les systèmes complètement neutre en ce qui concerne les charges quantiques. En effet, la seule manière d'obtenir le même nombre après inversion du signe est si le signe est nul. De plus, tout comme  $\mathcal{P}$ , la loi de conservation est multiplicative, mais elle est par contre normalement valide pour tout type d'interaction, puisque l'opérateur commute avec l'hamiltonien.

Dans l'optique de vouloir trouver une symétrie qui n'est jamais brisée, la symétrie  $\mathcal{CP}$  a d'abord été considérée comme inviolable. Il a par contre été démontrée qu'elle n'est pas respectée dans les interactions faibles, notamment lors de la désintégration des pions. L'invariance sous l'action combinée des trois opérateurs discrets a alors été considérée. À partir des définitions énoncées plus haut, et en utilisant les axiomes de la relativité restreinte, il est possible de prouver le théorème  $\mathcal{CPT}$ . La démarche considère également que les énergies des fonctions d'ondes des particules sont bornées vers le bas, donc qu'elles possèdent une énergie minimale finie. La preuve a d'abord été formulée par Lüders et Pauli pour une théorie quantique des champs locale et respectant l'invariance de Lorentz. Une preuve plus générale respectant les axiomes de la théorie quantique des champs axiomatique a également pu être construite par Jost.

L'idée de la preuve est d'envoyer la coordonnée de temps des opérateurs vers un temps imaginaire en utilisant l'hamiltonien. En effet, une transformation de Lorentz dans la direction  $x$  peut être considérée comme une rotation de l'axe temporel, mais dont le paramètre est imaginaire. Or, avec une rotation comportant un paramètre réel, il est possible d'inverser la direction de  $t$  et de  $x$  avec une rotation de  $180^\circ$ . Il est donc possible de créer une réflexion de l'espace spatio temporel en envoyant le temps  $t$  vers un temps imaginaire et de considérer l'opérateur  $\mathcal{CPT}$  comme une rotation de  $180^\circ$  du système de particules. À l'aide des suppositions mentionnées plus haut, il est possible de construire le prolongement analytique de l'opérateur dans un espace euclidien, donc qui respecte l'invariance sous transformation de Lorentz et où les rotations de l'espace-temps sont bien définies. Le prolongement analytique est une opération qui étend le domaine d'une fonction analytique à un domaine plus élargi souvent dans le plan complexe. Finalement, le commutateur nul entre l'hamiltonien et les générateurs du groupe de Lorentz garantit que  $\mathcal{CPT}$  est invariant de Lorentz, donc invariant sous une rotation de  $180^\circ$ , par exemple.

Une des implications de ce théorème est que les violations de  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{T}$  ne peuvent pas être indépendantes. En effet, pour que la symétrie  $\mathcal{CPT}$  demeure valide, il est nécessaire que lorsque la symétrie d'un de ces constituants est violée, une violation d'un autre opérateur soit elle aussi violée pour compenser l'asymétrie. Cette implication demeure cohérente puisque toutes les brisures de  $\mathcal{CP}$  peuvent être associées à des brisures de  $\mathcal{T}$  mathématiquement. L'invariance de l'univers sous la symétrie  $\mathcal{CPT}$  implique également qu'un univers miroir au notre, formé d'antiparticules plutôt que de particules et dont le temps s'écoule à l'envers, se comporterait exactement de la même manière que notre univers. Les lois de la physique sont donc invariantes sous cette symétrie. Ceci implique également que l'antiparticule doit avoir la même masse que sa particule associée.

## Conclusion (Marianne Gratton)

En conclusion, la théorie quantique des champs permet de régler la plupart des problèmes conceptuels associés à la mécanique quantique relativiste. La QFT donne une approche différente basée sur la quantification de champs classique. Comme démontré pour le champ de Klein-Gordon et le champ de Dirac, il est relativement facile d'obtenir l'hamiltonien est d'immédiatement calculer des énergies et voir l'effet des opérateurs de création et d'annihilation sur les champs. La QFT est au coeur de la physique des particules. En effet, le modèle standard, la théorie la plus actuelle des interactions et des particules subatomiques, est basé sur la théorie quantique des champs. Ce modèle est une grande réussite de la physique fondamentale puisqu'il a permis de nombreuses prédictions qui se sont avérées véritables expérimentalement. On peut par exemple penser au fameux boson de Higgs ou des bosons W et Z de l'interaction faible. Ce modèle n'est par contre pas complet puisque quelques phénomènes ne peuvent encore pas être expliqués, notamment par rapport à la masse des neutrinos et leur phénomène d'oscillations. Les extensions du Modèle Standard, comme la supersymétrie, sont aussi généralement construites à partir du cadre théorique de la théorie quantique des champs.

## Références

- [1] S. ATTAL, *The Algebra of Cononical Commutation Relation*, <http://math.univ-lyon1.fr/~attal/Mescours/fock.pdf> [consulté le 12 avril 2019]
- [2] H. Murayama *Lecture Notes 221 B : Quantum Field Theory (a.k.a. Second Quantization)*, printemps 2005, <http://hitoshi.berkeley.edu/221b/QFT.pdf> [consulté le 10 avril 2019]
- [3] F. Wilczek, *Quantum Field Theory*, [http://web.mit.edu/physics/people/faculty/docs/wilczek\\_quantum\\_field\\_theory.pdf](http://web.mit.edu/physics/people/faculty/docs/wilczek_quantum_field_theory.pdf) [consulté le 13 avril 2019].
- [4] L. Marleau, *Symétrie CPT*, [http://feynman.phy.ulaval.ca/marleau/pp/10cpt/sym\\_cpt.html](http://feynman.phy.ulaval.ca/marleau/pp/10cpt/sym_cpt.html) [consulté le 13 avril 2019].
- [5] Wikipedia, *CPT Symmetry*, [https://en.wikipedia.org/wiki/CPT\\_symmetry](https://en.wikipedia.org/wiki/CPT_symmetry), 2018.
- [6] R.F. Streater, *Wightman Quantum Field Theory*, [http://www.scholarpedia.org/article/Wightman\\_quantum\\_field\\_theory](http://www.scholarpedia.org/article/Wightman_quantum_field_theory), 2019 [consulté le 10 avril 2019].
- [7] Wikipedia, *Quantum Field Theory*, [https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum\\_field\\_theory](https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_field_theory) [consulté le 9 avril 2019].
- [8] E. Fradkin, *Quantization of the Dirac Field*, <http://eduardo.physics.illinois.edu/phys582/582-chapter7.pdf> [consulté le 8 avril 2019].
- [9] R.F. Streater & A.S. Wightman. *PCT, spin and statistics, and all that*, 1964.
- [10] M.E. Peskin & D.V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, p. 13-37, 1995.
- [11] J.F. Fortin, Notes du cours *PHY-4015 : Mécanique Quantique II*, p. 14,59,109-121, 2018.
- [12] L. Marleau, Notes du cours *PHY-3501 : Physique des particules*, chapitres 4 et 5, 2019.