

SUPERSYMÉTRIE

Frédéric DION
Jérôme SIMON
Anton ZHEKOV

Physique des particules — PHY-3501
Département de physique, de génie physique et d'optique



UNIVERSITÉ
LAVAL

Table des matières

TABLE DES MATIÈRES	I
LISTE DES FIGURES	II
LISTE DES TABLEAUX	III
1 INTRODUCTION.	1
2 CONSTRUCTION DE LA SUPERALGÈBRE (Jérôme SIMON)	2
2.1 Motivations mathématiques	2
2.2 Matériel mathématique	2
2.2.1 Algèbre graduée	2
2.2.2 Superalgèbre de Lie.	3
2.3 Superalgèbre de Poincaré	4
2.3.1 Interprétation physique de la parité.	4
2.3.2 Spineurs de Weyl.	5
2.3.3 Relations de commutation	6
2.3.4 Conséquences directes.	10
2.4 Références spécifiques	12
3 MODÈLE STANDARD SUPERSYMETRIQUE MINIMAL (Frédéric DION)	13
3.1 Représentations de la superalgèbre de Lie	13
3.1.1 Supermultiplets sans masse	14
3.1.2 Supermultiplets massifs	16
3.2 Conservation de la parité R	22
3.3 Références spécifiques	23
4 PROBLÈMES RÉGLÉS ET CAUSÉS PAR LE MSSM (Anton ZHEKOV)	24
4.1 Problème de hiérarchie	24
4.2 Unification du couplage de jauge : le modèle $SU(5)$	25
4.3 Matière noire	29
4.4 <i>Problème μ</i>	32
4.5 Non-détection des superpartenaires	32
4.6 Références spécifiques	33
5 CONCLUSION	34
RÉFÉRENCES.	35

Table des figures

1	Modèle standard.	19
2	Superpartenaires.	20
3	Production de paires de sélectrons-anti-sélectrons $\tilde{e}\tilde{e}$ suivie de la désintégration des sélectrons en photinos et électrons. La figure est tirée des notes [13].	23
4	Couplage entre le champ de Higgs et une paire fermion-antifermion.	24
5	Couplage entre le champ de Higgs et une particule scalaire S	25
6	Constantes de couplage en fonction de l'énergie.	26
7	interactions leptons-quarks-leptoquarks dans $SU(5)$	28
8	Diagrammes de l'annihilation la plus simple d'une paire de neutralinos passant par l'échange d'un slepton $\tilde{\ell}$	31
9	Trois mécanismes d'annihilation.	31

Liste des tableaux

1	Supermultiplets chiral dans le MSSM.	21
2	Supermultiplets de jauge dans le MSSM.	21

1. Introduction

La théorie de la relativité restreinte d'Einstein a aujourd'hui remplacé les lois de la mécanique de Newton. Toutefois, la version newtonienne demeure une excellente approximation lorsque les objets étudiés se déplacent à des vitesses non relativistes. De la même manière, les classifications successives des particules élémentaires et de leurs interactions ont mené au modèle standard, modèle théorique pratiquement hermétique à toute compétition. Même s'il existe un ensemble de phénomènes pour lesquels le modèle standard fournit des prédictions adéquates, il n'est pourtant pas à l'abri d'une extension. La recherche actuelle en physique des particules s'attaque notamment à ce problème et la physique à haute énergie intéresse particulièrement, ce dont témoigne la création de plusieurs collisionneurs de particules de plus en plus puissants et polyvalents.

Ceci dit, la supersymétrie consiste en l'extension de l'algèbre de Poincaré, laquelle décrit toutes les symétries de l'espace-temps du modèle standard actuel. En faisant apparaître un opérateur qui relie fermions et bosons, un degré de symétrie supplémentaire s'installe et les principes qui énoncent que le modèle standard est complet peuvent être contournés. Cette supersymétrie est décrite à l'aide de relations d'anticommutation avec le nouvel opérateur. Les conséquences immédiates des mathématiques introduites sont que les fermions et bosons sont effectivement reliés un à un et qu'ils partagent des propriétés, notamment leur masse. Cela établit certains fondements du modèle standard supersymétrique minimal (MSSM).

En effet, le MSSM est une extension proposée du modèle standard. Il considère un nombre minimal de nouvelles particules et de nouvelles interactions manifestement invariantes. Notamment, le MSSM permet l'union de particules élémentaires du modèle standard avec des particules supersymétriques, associées à un supermultiplet. En physique théorique, un supermultiplet est une représentation d'une algèbre supersymétrique. Il représente en quelque sorte un ensemble de particules appelées superpartenaires, *sparticles* ou *shadow particles*, évoluant dans le superspace introduit. L'étude des représentations de la superalgèbre de Lie et des degrés de liberté associés à chaque supermultiplet permet donc d'extraire les particules et leurs partenaires.

Enfin, la supersymétrie fournit des solutions naturelles à certains problèmes contemporains de la physique des particules, notamment le problème de la hiérarchie, l'unification du couplage de jauge et l'existence de la matière noire. En effet, du fait de certaines corrections quant à la masse du boson de Higg, l'approximation de la valeur attendue de sa masse se rapproche de celle observée. Elle unifie aussi les constantes de couplage à haute énergie et elle fournit des candidats à la matière noire, c'est-à-dire : le sneutrino, le gravitino et le neutralino.

2. Construction de la superalgèbre (Jérôme Simon)

2.1 Motivations mathématiques

En bref, le théorème de Mandula-Coleman énonce que le modèle standard, tel qu'il est actuellement, apparaît complet en théorie. Les symétries de l'espace-temps respectées par le modèle standard et décrites par l'algèbre de Poincaré sont suffisantes et ajouter trivialement davantage de contraintes aurait pour incidence de retirer toute interaction du modèle.

Or, le théorème de Mandula-Coleman omet le cas de symétries décrites par des algèbres graduées, c'est-à-dire des algèbres composées par somme directe, chacune étant identifiée d'une graduation. En effet, le théorème de Mandula-Coleman est basé sur l'hypothèse que les symétries apparaissent par des relations de commutation, mais l'extension proposée implique des symétries décrites par des relations d'anticommutation, d'où le théorème peut être évité. L'extension la plus simple de l'algèbre de Poincaré est une algèbre graduée composée de deux algèbres, l'une paire et l'autre impaire, dont les représentations sont associées aux bosons et aux fermions, respectivement. Au final, l'effet de cette composition est de doubler la quantité de particules fondamentales admises par le modèle standard en associant à chacune un partenaire. En effet, la somme directe impliquée dans la graduation duplique la quantité d'éléments de la représentation.

2.2 Matériel mathématique

2.2.1 Algèbre graduée

Une algèbre graduée A est la composition d'algèbres A_i de graduation i telle que

$$A = A_0 \oplus A_1 \oplus \cdots \oplus A_N = \bigoplus_{i=0}^N A_i \quad (1)$$

et est munie d'une opération de composition entre ses sous-algèbres qui respecte

$$A_i A_j \subseteq A_{i+j}. \quad (2)$$

Cela signifie que l'opération de composition a pour effet d'additionner les graduations des algèbres, d'où les algèbres peuvent être ordonnées et d'où leur composition peut effectivement être qualifiée de graduée.

Par exemple, l'ensemble P de tous les polynômes de degrés $n \in \mathbb{N}$ constitue une algèbre graduée. En effet, cet ensemble est composé de sous-algèbres indépendantes P_i constituées de polynômes de degré i . Quand elles sont composées par multiplication, le degré final est l'addition des degrés initiaux. Cela peut être vérifié avec un exemple particulier. Soit $p_1 = 1 + x \in P_1$ et

$p_2 = 1 + x + x^2 \in P_2$, de graduations 1 et 2. La multiplication de ces deux polynômes donne un polynôme de graduation 3, $p_3 = 1 + 2x + 2x^2 + x^3 \in P_3$, et, effectivement, $p_1 p_2 \in P_{1+2} = P_3$.

Une algèbre peut être graduée selon n'importe quel monoide, c'est-à-dire n'importe quel ensemble muni d'une loi de composition associative et comportant un élément nul. Cela signifie que la graduation n'est pas limit e aux entiers $n \in \mathbb{N}$ et que la composition des graduations de l'équation 2 peut être r alis e de façon plus générale que par l'addition. Notamment, une algèbre peut être graduée avec \mathbb{Z}_2 , c'est-à-dire l'ensemble $\{0, 1\}$ muni de l'opération d'addition modulo 2, un ensemble qui traduit mathématiquement la parité. C'est le choix qui est effectué en supersymétrie : une superalgèbre est essentiellement une algèbre graduée selon \mathbb{Z}_2 .

2.2.2 Superalgèbre de Lie

Si une superalgèbre est graduée selon \mathbb{Z}_2 et que la loi de composition entre les sous-algèbres respecte l'équation 2, on peut associer les sous-algèbres à leur parité. En effet, avec $A_0 = E$ et $A_1 = O$, de *even* et *odd*, respectivement, on voit que composer les éléments $a_0^{(i)} = e^{(i)} \in E$ et $a_1^{(i)} = o^{(i)} \in O$ a l'effet exact d'une composition des parités, puisque

$$e^{(i)} e^{(j)} = a_0^{(i)} a_0^{(j)} = a_{(0+0) \bmod 2}^{(k)} = a_0^{(k)} = e^{(k)}, \quad EE \subseteq E, \quad (3)$$

$$e^{(i)} o^{(j)} = a_0^{(i)} a_1^{(j)} = a_{(0+1) \bmod 2}^{(k)} = a_1^{(k)} = o^{(k)}, \quad EO \subseteq O, \quad (4)$$

$$o^{(i)} o^{(j)} = a_1^{(i)} a_1^{(j)} = a_{(1+1) \bmod 2}^{(k)} = a_0^{(k)} = e^{(k)}, \quad OO \subseteq E. \quad (5)$$

Des relations de parité observ es précédemment, certaines relations de commutation peuvent être obtenues, notamment

$$[e^{(i)}, e^{(j)}] = e^{(k)} \in E, \quad (6)$$

$$[e^{(i)}, o^{(j)}] = o^{(k)} \in O, \quad (7)$$

$$\{o^{(i)}, o^{(j)}\} = e^{(k)} \in E. \quad (8)$$

Un ensemble est qualifié d'algèbre de Lie simplement s'il s'agit d'un groupe vectoriel qui possède une loi de composition telle que

$$[a_i^{(j)}, a_i^{(j)}] = 0, \quad (9)$$

$$[a_i^{(j)}, [a_i^{(k)}, a_i^{(l)}]] + [a_i^{(k)}, [a_i^{(l)}, a_i^{(j)}]] + [a_i^{(l)}, [a_i^{(j)}, a_i^{(k)}]] = 0, \quad (10)$$

où la dernière équation est l'identité de Jacobi. L'algèbre de Poincaré est une algèbre de Lie, étant munie d'un commutateur respectant les relations pr sent es. Finalement, une superalgèbre de Lie est simplement une algèbre graduée selon \mathbb{Z}_2 présentant les propriétés de parité 6 à 8 et

où les propriétés 9 et 10 sont adapt es en conséquence.

2.3 Superalgèbre de Poincaré

Toute algèbre graduée est une exception du théorème de Mandula-Coleman, c'est-à-dire que composer toute quantité d'algèbres par sommes directes donne une algèbre qui peut décrire des symétries additionnelles de l'espace-temps. En ce sens, choisir une algèbre graduée selon \mathbb{Z}_2 et, donc, compos e de deux éléments est un choix minimal.

Certes, composer deux algèbres et étendre le modèle standard est possible, mais le réaliser demande de trouver des opérateurs propres à chacune des algèbres et de montrer qu'ils commutent de la façon prescrite par les équations 6 à 8.

2.3.1 Interprétation physique de la parité

Le fait que les opérateurs issus de E préservent la parité et que les opérateurs issus de O ont pour effet de la changer laisse croire que les opérateurs $e^{(i)}$ sont les générateurs des transformations du groupe de Poincaré usuel et que les opérateurs $o^{(i)}$ sont des générateurs qui convertissent les objets entre les représentations paires et les représentations impaires. En effet, à même un des groupes de Poincaré, les générateurs sont bien définis et donnés par

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad (11)$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = \eta_{\mu\rho}P_\nu - \eta_{\nu\rho}P_\mu, \quad (12)$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = \eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}, \quad (13)$$

où $\eta_{\mu\nu}$ est la métrique de Minkowski, où P_μ est le générateur associé aux translations et où $M_{\mu\nu}$ est le générateur associé aux transformations de Lorentz. Cela illustre que la commutation des générateurs P_μ ou $M_{\mu\nu}$ n'a pas pour effet de créer de symétrie supplémentaire, d'où ils appartiennent à E , et que ce rôle revient plutôt à un nouvel opérateur Q_α , la supercharge. Par ailleurs, pour chaque symétrie du système, il doit exister une quantité conserv e, de par le théorème de Noether, ce qui illustre qu'il faut associer à la symétrie supplémentaire un nouvel opérateur.

Plus encore, le théorème de Haag-Lopuszanski-Sohnius, lequel est une variante plus restrictive encore que le théorème Mandula-Coleman, indique que s'il existe un générateur Q_α , il peut uniquement être de spin $1/2$, d'où la symétrie ajout e met nécessairement en relation des bosons et des fermions. Cela signifie, par ailleurs, que les fermions sont associés à la représentation impaire de l'algèbre graduée, tandis que les bosons sont associés à la représentation paire.

2.3.2 Spineurs de Weyl

Si les générateurs Q_α sont de spin $1/2$, c'est qu'ils sont des spineurs dans la représentation de spin $1/2$ du groupe de Lorentz. Cela signifie que les spineurs sont obtenus de l'équation de Dirac et qu'ils peuvent être d ecompos es en spineurs de Weyl, laquelle met en évidence la chiralité de la particule concernée.

La chiralité décrit si une particule se transforme dans la représentation droite ou la représentation gauche du groupe de Poincaré. La chiralité peut aussi s'exprimer comme la réaction d'une particule à une transformation de parité qui a pour e et d'en rendre l'image miroir et est, en ce sens, une propriété fondamentale des particules. Puisque les particules et antiparticules peuvent exister en chacune des chiralités lorsqu'une masse est introduite, les spineurs de Dirac peuvent être d ecompos es d'après la chiralité. Ainsi, on peut r ecrire les générateurs des transformations du groupe de Poincaré en les diagonalisant dans la base qui agit sur des chiralités séparées. Cela permet d'obtenir des relations de commutation de la superalgèbre qui sont plus naturelles.

En e et, de façon à mettre en évidence les relations de commutation entre les générateurs, il faut identifier comment se transforme généralement un spineur de Dirac $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_a^{(L)} & \psi_a^{(R)} \end{pmatrix}^T$ d'après chacun des spineurs de Weyl qui le compose, c'est-à-dire identifier les générateurs du groupe de Lorentz pour les spineurs de Weyl. En d efinisant $\sigma^{\mu\nu}$ comme une combinaison antisymétrique de matrices de Pauli,

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{4}[\sigma^\mu, \bar{\sigma}^\nu], \quad (14)$$

où la barre est l'opération de conjugaison complexe, la diagonalisation du générateur par rapport à la représentation chirale est dès lors complétée. $\sigma^{\mu\nu}$ n'agit que sur la partie de chiralité gauche du spineur tandis que $\bar{\sigma}^{\mu\nu}$ n'agit que sur la partie de chiralité droite du spineur, ce qu'on peut montrer à partir des générateurs dans la base de Dirac. En e et, on trouve, dans la littérature, pour le générateur $\Sigma^{\mu\nu}$ des transformations de Lorentz dans la base de Dirac, que

$$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (15)$$

$$= \frac{i}{4} \begin{pmatrix} [\sigma^\mu, \bar{\sigma}^\nu] & 0 \\ 0 & [\bar{\sigma}^\mu, \sigma^\nu] \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$= \begin{pmatrix} i\sigma^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & i\bar{\sigma}^{\mu\nu} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

où γ_μ est une matrice de Dirac, ce qui montre que $i\sigma^{\mu\nu}$ et $i\bar{\sigma}^{\mu\nu}$ sont directement les générateurs

de Lorentz pour chacune des chiralités, puisque l'action d'une transformation de Lorentz serait

$$\Sigma_{\mu\nu}\Psi = \begin{pmatrix} i\sigma^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & i\bar{\sigma}^{\mu\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_a^{(L)} \\ \psi_a^{(R)} \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$= \begin{pmatrix} i\sigma^{\mu\nu}\psi_a^{(L)} \\ i\bar{\sigma}^{\mu\nu}\psi_a^{(R)} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Par ailleurs, puisque la représentation du groupe de Poincaré est séparée en chiralités gauche et droite, on associe en fait deux opérateurs Q_α et $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ agissant sur chacune des chiralités, à la façon de $\sigma^{\mu\nu}$ et $\bar{\sigma}^{\mu\nu}$. Le point à l'indice $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ est présent pour rappeler que les opérateurs agissent sur des représentations séparées et que leurs indices ne peuvent être contract es.

2.3.3 Relations de commutation

Les relations de commutation supplémentaires apparaissant à cause de la supersymétrie sont au nombre de quatre. Avant de procéder à la dérivation de chacune de ces relations, il faut rappeler l'e et d'une transformation finie à partir des générateurs infinitésimaux $\sigma^{\mu\nu}$, Q_α , P_μ et $M^{\mu\nu}$. Les transformations finies S sont obtenues par exponentiation, puisque, pour une transformation $(\mathbf{1} + \epsilon T)$ provoquant un changement infinitésimal ϵ de la quantité $f(x)$, on obtient, par la répétition de $(\mathbf{1} + \epsilon T)$, une série qui correspond à la série de Taylor de l'exponentielle. T correspond directement au générateur infinitésimal de la transformation. En e et, si le changement fini s'écrit $Sf(x) = f(x + \omega x)$, avec $\epsilon = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\omega}{N}$,

$$Sf(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} (\mathbf{1} + \epsilon T)^N f(x) \quad (20)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\mathbf{1} + \frac{\omega}{N} T \right)^N f(x) \quad (21)$$

$$= \exp\{\omega T\} f(x), \quad (22)$$

puisque $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N = \exp\{x\}$.

Les relations de commutation ajoutées sont :

1. $[M^{\mu\nu}, Q_\alpha]$

Sous l'action d'une transformation finie de $i\sigma^{\mu\nu}$, un spineur change d'une quantité

$$Q'_\beta = \exp\left\{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right\}_\beta^\alpha Q_\alpha, \quad (23)$$

ce qui a été obtenu d'après l'expression pour les transformations de Lorentz dans la base de Dirac $\Sigma^{\mu\nu}$. Des indices apparaissent par paires puisque certaines quantités concernées sont matricielles et il s'agit essentiellement de faire correspondre la structure d'indices

  l'objet sur lequel l'opération s'exécute. Si, plutôt, les $M^{\mu\nu}$ sont utilisés pour générer l'e et de Q'_α en transformant d'abord ce sur quoi agit Q_α d'après une transformation de Lorentz, puis en appliquant la transformation inverse, on obtient

$$Q'_\beta = \left(\exp \left\{ -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \right\} \right)^{-1} Q_\beta \exp \left\{ -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \right\} \quad (24)$$

$$= \exp \left\{ \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \right\} Q_\beta \exp \left\{ -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \right\}, \quad (25)$$

puisque l'opération inverse associ e à la phase engendr e par la transformation finie est essentiellement d'en prendre le conjugué. Plus formellement, cela s'explique par le fait que les générateurs sont unitaires.

Les deux résultats précédents doivent être identiques au premier ordre, puisque la transformation de symétrie dans l'espace des coordonnées doit être la même qu'une transformation de symétrie dans l'espace d'Hilbert. Autrement dit,

$$\hat{O}'(t) = \hat{U}(g) \hat{O}(t) \hat{U}(g)^{-1} = D(g^{-1}) \hat{O}(gt), \quad (26)$$

où \hat{U} est l'opérateur agissant dans l'espace d'Hilbert, où D est l'opérateur agissant dans l'espace des coordonnées et où g représente la transformation de symétrie effectu e en termes de coordonnées. En e et, chacune des opérations traduit le même e et : pivoter une représentation, agir sur celle-ci avec l'opérateur \hat{O} et ramener la représentation dans son orientation initiale est strictement équivalent à agir sur celle-ci avec un opérateur qui a été pivot , mais qui demeure dans la base initiale. C'est ce qu'expriment les transformations précédentes. Si $\sigma^{\mu\nu}$ est équivalent à D et que $M^{\mu\nu}$ est équivalent à \hat{U} , c'est que $\sigma^{\mu\nu}$ agit directement sur la représentation de l'opérateur, alors que $M^{\mu\nu}$ correspond aux transformations de Lorentz dans la représentation de Dirac. C'est donc essentiellement de changer le problème de sens : plutôt que de changer l'expression pour un générateur, on pivote ce sur quoi il agit. Cela explique, par ailleurs, pourquoi les indices dans l'expression de Q'_β étaient contractés dans un cas avec Q_β et ne l'étaient pas dans l'autre.

Ces transformations sur un spineur s'expriment donc, au premier ordre, comme

$$Q'_\beta \approx \left(\mathbf{1} - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right)_\beta^\alpha Q_\alpha \quad (27)$$

$$\approx \left(\mathbf{1} + \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \right) Q_\beta \left(\mathbf{1} - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \right) \quad (28)$$

$$\implies Q_\beta - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(\sigma^{\mu\nu})_\beta{}^\alpha Q_\alpha \approx Q_\beta - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(Q_\beta M^{\mu\nu} - M^{\mu\nu} Q_\beta). \quad (29)$$

De la dernière équation, la relation de commutation peut être identifi e comme étant

$$[M_{\mu\nu}, Q_\alpha] = i(\sigma_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta Q_\beta. \quad (30)$$

2. $[P_\mu, Q_\alpha]$

D'après les arguments de parité présentés à la relation précédente, en composant P_μ et Q_α , seuls des générateurs Q_α et $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ sont des solutions acceptables. La seule combinaison d'indices qui permette de relier $[P_\mu, Q_\alpha]$ et $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ de façon non triviale implique les matrices de Pauli, d'où

$$[P_\mu, Q_\alpha] = c (\sigma_\mu)_\alpha{}^{\dot{\alpha}} \bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \quad (31)$$

avec c , une constante de proportionnalité. En appliquant la conjugaison sur cette relation, on trouve aussi

$$[P_\mu, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}] = c^* (\bar{\sigma}_\mu)_{\dot{\alpha}}{}^\alpha Q_\alpha. \quad (32)$$

Cette structure d'indices montre aussi pourquoi seul $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ peut se trouver dans la solution. En effet, de chaque côté de l'équation doivent se sommer la même quantité d'indices associés aux représentations de chiralités différentes. Puisque P_μ agit à la fois sur les indices α et $\dot{\alpha}$, la commutation de P_μ et Q_α se doit d'agir dans la représentation de $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$.

D'après l'identité de Jacobi et d'après la relation de commutation 11 pour P_μ ,

$$0 = [P_\mu, [P_\nu, Q_\alpha]] + [Q_\alpha, [P_\mu, P_\nu]] + [P_\nu, [Q_\alpha, P_\mu]] \quad (33)$$

$$= [P_\mu, c (\sigma_\nu)_\alpha{}^{\dot{\alpha}} \bar{Q}_{\dot{\alpha}}] - [P_\nu, c (\sigma_\mu)_\alpha{}^{\dot{\alpha}} \bar{Q}_{\dot{\alpha}}] \quad (34)$$

$$= c (\sigma_\nu)_\alpha{}^{\dot{\alpha}} [P_\mu, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}] - c (\sigma_\mu)_\alpha{}^{\dot{\alpha}} [P_\nu, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}] \quad (35)$$

$$= c (\sigma_\nu)_\alpha{}^{\dot{\alpha}} c^* (\bar{\sigma}_\mu)_{\dot{\alpha}}{}^\beta Q_\beta - c (\sigma_\mu)_\alpha{}^{\dot{\alpha}} c^* (\bar{\sigma}_\nu)_{\dot{\alpha}}{}^\beta Q_\beta \quad (36)$$

$$= |c|^2 (\sigma_\nu \bar{\sigma}_\mu - \sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu)_\alpha{}^\beta Q_\beta, \quad (37)$$

où $\sigma_\nu \bar{\sigma}_\mu - \sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu$ n'est pas nulle *a priori*. Cela permet d'établir que la quantité recherch e est nulle, puisque $c = 0$ est l'unique solution à l'équation précédente, d'où

$$[P_\mu, Q_\alpha] = 0, \quad (38)$$

$$[P_\mu, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}] = 0. \quad (39)$$

3. $\{Q_\alpha, Q_\beta\}$

D'après les mêmes arguments de structure d'indices que précédemment, la seule solution acceptable est de la forme

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = c(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha\beta} M_{\mu\nu}. \quad (40)$$

En e et, la solution pourrait contenir un terme en $(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha\beta} P_\mu P_\nu$, mais, puisque $\sigma^{\mu\nu}$ est antisymétrique, d'après la définition 14, c'est impossible. En e et, $P_\mu P_\nu$ est symétrique et la contraction d'un tenseur symétrique avec un tenseur antisymétrique est systématiquement nulle.

Or, $\{Q_\alpha, Q_\beta\}$ commute avec P_μ , alors que ce n'est pas le cas pour la solution proposée, comme le montre la relation de commutation 12. En e et, en mettant à profit le fait que Q_α et P_μ commutent,

$$[P_\mu, \{Q_\alpha, Q_\beta\}] = P_\mu \{Q_\alpha, Q_\beta\} - \{Q_\alpha, Q_\beta\} P_\mu \quad (41)$$

$$= P_\mu Q_\alpha Q_\beta + P_\mu Q_\beta Q_\alpha - Q_\alpha Q_\beta P_\mu - Q_\beta Q_\alpha P_\mu \quad (42)$$

$$= P_\mu Q_\alpha Q_\beta + P_\mu Q_\beta Q_\alpha - P_\mu Q_\alpha Q_\beta - P_\mu Q_\beta Q_\alpha \quad (43)$$

$$= 0. \quad (44)$$

Ainsi, la solution permettant aux deux côtés de l'équation de commuter avec P_μ est

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0. \quad (45)$$

4. $\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\}$

D'après les mêmes arguments de structure d'indices que précédemment, la seule solution acceptable est de la forme

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = c(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu. \quad (46)$$

Aucune relation ne permet de fixer la constante de proportionnalité c . La solution est en tous points acceptable et on fixe $c = 2$, par convention, d'où

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu. \quad (47)$$

Regroupant, on retrouve donc

$$[M_{\mu\nu}, Q_\alpha] = i(\sigma_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta Q_\beta, \quad (48)$$

$$[P_\mu, Q_\alpha] = [P_\mu, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}] = 0, \quad (49)$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0, \quad (50)$$

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = 2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu P_\mu. \quad (51)$$

Par ailleurs, les relations de commutation obtenues respectent les relations de parité entre les algèbres paires et impaires présentées à la section précedente, plus précisément aux équations 6 à 8. En effet, si P_μ et $M^{\mu\nu}$ sont pairs et que Q_α est impair, la combinaison d'opérateurs pairs ou d'opérateurs impairs donne bien un opérateur pair et la combinaison d'opérateurs pair et impair donne bien un opérateur impair. La combinaison des équations 11 à 13 et des équations 48 à 51 décrit l'enti erit e de la superalgèbre de Poincaré.

2.3.4 Conséquences directes

Sans entrer dans le détail du modèle standard supersymétrique, on observe que les fermions et les bosons sont reli es un à un par Q_α ou $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$, qu'ils ont des masses égales et que l'énergie d'un état est toujours positive.

En effet, puisque les opérateurs Q_α et $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ relient les fermions et les bosons par leur action et que l'énergie d'une particule libre est $E = \frac{P^2}{2m}$, les masses des particules ainsi reli es sont égales si P^2 commute avec Q_α . Or, c'est le cas si $[P_\mu, Q_\alpha] = 0$, comme le montre la relation 49, puisque

$$[P^2, Q_\alpha] = [P^\mu P_\mu, Q_\alpha] \quad (52)$$

$$= P^\mu P_\mu Q_\alpha - Q_\alpha P^\mu P_\mu \quad (53)$$

$$= Q_\alpha P^\mu P_\mu - Q_\alpha P^\mu P_\mu \quad (54)$$

$$= 0. \quad (55)$$

Autrement dit, évaluer la masse d'une particule et la transformer en son opposée donne le même résultat que si elle avait été transformée au préalable. Cela n'est pas le résultat d'un changement d'énergie cinétique, puisque $[P_\mu, Q_\alpha]$. La conclusion est que les particules ainsi reli es ont la même masse.

L'association des fermions et des bosons un à un peut être observée en définissant un opérateur $(-1)^F$ qui extrait la statistique de laquelle la particule est issue, de façon telle que, pour

un fermion $|F\rangle$ et un boson $|B\rangle$, l'action de l'opérateur est

$$(-1)^F |F\rangle = -|F\rangle, \quad (-1)^F |B\rangle = |B\rangle. \quad (56)$$

Cet opérateur anticommute avec Q_α , puisque transformer une particule par l'action de Q_α avant d'évaluer sa statistique inversera le résultat. Soit la trace $\text{Tr}\{(-1)^F \{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\}\}$. Puisqu'elle contient des opérateurs reliant les deux statistiques, l'information sur la quantité d'éléments des représentations peut être extraite. En e et, en mettant à profit l'anticommuation de $(-1)^F$ et Q_α ou \bar{Q}_α et la cyclicité de la trace,

$$\text{Tr}\{(-1)^F \{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\}\} = \text{Tr}\{(-1)^F Q_\alpha \bar{Q}_\beta + (-1)^F \bar{Q}_\beta Q_\alpha\} \quad (57)$$

$$= \text{Tr}\{-Q_\alpha (-1)^F \bar{Q}_\beta + Q_\alpha (-1)^F \bar{Q}_\beta\} = 0. \quad (58)$$

En mettant plutôt à profit la relation de commutation 51 et utilisant $P_\mu |\cdot\rangle = p_\mu |\cdot\rangle$, où P_μ extrait le moment p_μ associé à l'état $|\cdot\rangle$,

$$\text{Tr}\{(-1)^F \{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\}\} = \text{Tr}\{(-1)^F 2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu P_\mu\} \quad (59)$$

$$= 2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu p_\mu \text{Tr}\{(-1)^F\}. \quad (60)$$

La conclusion à tirer est que la quantité de fermions et la quantité de bosons est la même, puisque, la trace étant $\text{Tr}\{A\} = \sum_i \langle i|A|i\rangle$ dans n'importe quelle représentation,

$$0 = \text{Tr}\{(-1)^F\} \quad (61)$$

$$= \sum_B \langle B|(-1)^F |B\rangle + \sum_F \langle F|(-1)^F |F\rangle \quad (62)$$

$$= \sum_B \langle B|B\rangle + \sum_F -\langle F|F\rangle \quad (63)$$

$$= \sum_B 1 + \sum_F -1 \quad (64)$$

$$= n_B - n_F \quad (65)$$

$$\implies n_B = n_F. \quad (66)$$

Finalement, l'énergie d'un état $|\omega\rangle$ est positive, puisque

$$\delta^{\alpha\dot{\alpha}} \langle \omega | \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} | \omega \rangle = \sum_{\dot{\alpha}} \langle \omega | (\bar{Q}_{\dot{\alpha}})^\dagger \bar{Q}_{\dot{\alpha}} | \omega \rangle + \sum_{\alpha} \langle \omega | (Q_\alpha)^\dagger Q_\alpha | \omega \rangle \quad (67)$$

$$= \sum_{\dot{\alpha}} \langle \bar{Q}_{\dot{\alpha}} \omega | \bar{Q}_{\dot{\alpha}} \omega \rangle + \sum_{\alpha} \langle Q_\alpha \omega | Q_\alpha \omega \rangle \geq 0, \quad (68)$$

ce qui peut aussi être écrit, avec $\delta^{\alpha\dot{\alpha}} = (\bar{\sigma}^0)^{\alpha\dot{\alpha}}$ et la relation de commutation 51,

$$\delta^{\alpha\dot{\alpha}} \langle \omega | \{ Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}} \} | \omega \rangle = (\bar{\sigma}^0)^{\alpha\dot{\alpha}} \langle \omega | 2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu P_\mu | \omega \rangle \quad (69)$$

$$= 4 \langle \omega | P_0 | \omega \rangle \quad (70)$$

$$= 4E \langle \omega | \omega \rangle. \quad (71)$$

Or, la quantité précédente est strictement positive d'après le développement pr c dent. La seule conclusion possible est que l'énergie est positive ou nulle pour tout  tat.

En introduisant une symétrie supplémentaire entre les bosons et les fermions par le biais de Q_α , on déduit effectivement que chacun des fermions a un partenaire boson et vice-versa, d'où la quantité de particules du modèle double. Ces quelques propriétés fournissent une base minimale à l'équivalent supersymétrique du modèle standard.

2.4 Références spécifiques

- ARGURIO Riccardo (2017) *Introduction to Supersymmetry*. Université Libre de Bruxelles, 159 pgs., URL homepages.ulb.ac.be/~rargurio/susycourse.pdf
- COLEMAN Sidney, MANDULA Jeffrey (1967) *All Possible Symmetries of the S Matrix*, volume 159. 1251–1256 pgs., doi: 10.1103/PhysRev.159.1251
- DIAZ-CRUZ J. Lorenzo, LOPEZ Bryan Larios, MEZA-ALDAMA O., PEREZ Jonathan Reyes (2015) *Weyl spinors and the helicity formalism*. URL arxiv.org/abs/1511.07477v1
- HAAG Rudolf, LOPUSZANSKI Jan T., SOHNIUS Martin (1975) *All possible generators of supersymmetries of the S-matrix*, volume 88. 257–274 pgs., doi: 10.1016/0550-3213(75)90279-5
- HAHN Thomas (2018) *An Introduction to Supersymmetry*. ETH Zurich, URL www.ethz.ch/content/dam/ethz/special-interest/phys/theoretical-physics/itp-dam/documents/gaberdriel/proseminar_fs2018/18_Hahn.pdf
- KRIPPENDORF Sven, QUEVEDO Fernando, SCHLOTTERER Oliver (2010) *Cambridge Lectures on Supersymmetry and Extra Dimensions*. URL arxiv.org/abs/1011.1491, arXiv: 1011.1491
- MARLEAU Luc (2019) *Introduction à la physique des particules*. Département de physique, génie physique et optique. Université Laval, PHY-3004
- NLAB (2019) *supercharge*. En ligne, URL ncatlab.org/nlab/show/supercharge
- NLAB (2019) *graded algebra*. En ligne, URL ncatlab.org/nlab/show/graded+algebra
- ROSENFELD Azriel (1969) *An introduction to algebraic structures*. Allyn And Bacon, 247 pgs
- TANEDO Flip (2019) *Helicity, Chirality, Mass, and the Higgs*. URL www.quantumdiaries.org/2011/06/19/helicity-chirality-mass-and-the-higgs/

3. Modèle standard supersymétrique minimal (**Frédéric** Dion)

Le modèle standard supersymétrique minimal (MSSM) est une extension proposée du modèle standard. Fondé sur la superalgèbre de Lie, il considère un nombre minimal de nouvelles particules et de nouvelles interactions manifestement invariantes. Notamment, le MSSM permet d'unir les bosons avec les fermions de sorte que chaque particule élémentaire du modèle standard possède un superpartenaire, associé à un supermultiplet. En physique théorique, un supermultiplet est une représentation d'une algèbre supersymétrique. Il représente en quelque sorte un ensemble de particules appelées superpartenaires, *sparticles* ou *shadow particles*.

Actuellement recherchés au *Large Hadron Collider* (LHC) [2], les superpartenaires correspondent à des opérateurs qui, en superspace, sont représentés par des superchamps. Les superchamps ne sont rien d'autre que des champs (QFT) évoluant dans un espace étendu appelé superspace. Les superchamps furent introduits pour la première fois par Abdus Salam et J.A. Strathdee dans leur article de 1974 sur les super transformations de jauge : *Supergauge Transformations* [21]. Certaines opérations sur les superchamps et une classification partielle furent d'ailleurs présentées quelques mois plus tard par Segio Ferrara, Julius Wess et Bruno Zumino dans leur article *Supergauge Multiplets and Superfields* [8].

De manière digérable, le superspace est un espace de coordonnées permettant d'introduire la supersymétrie. Cet espace est caractérisé par les dimensions x, y, z, t habituelles et par d'autres dimensions dites anticommutantes dont les coordonnées sont décrites en nombres de Grassmann. En effet, à chaque point d'espace x_μ , on attache une coordonnée de Grassmann θ_α . Les dimensions ordinaires correspondent ainsi aux degrés de liberté des *bosons* alors que les dimensions construites en coordonnées de Grassmann correspondent à ceux des *fermions*. D'une certaine façon, cette relation permet l'union fermions-bosons et ainsi la caractérisation des divers superchamps associés. L'étude des représentations de la superalgèbre de Lie permet alors d'extraire les particules et leurs superpartenaires de ces superchamps polyvalents.

Visant l'exploration, la vulgarisation et la compréhension des principaux concepts et relations associés au MSSM, l'approche utilisée aspire donc à stimuler la curiosité du lecteur et à répondre à plusieurs questionnements quant à la nature et au contenu des supermultiplets issus de champs supersymétriques.

3.1 Représentations de la superalgèbre de Lie

Les représentations de la superalgèbre de Lie sont appelées supermultiplets. Ils peuvent être vus comme un assemblage de plusieurs représentations d'algèbre de Lorentz. Afin d'en arriver à une caractérisation relativement simplifiée et rapide du MSSM, on s'intéresse à l'action des opérateurs d'échelle sur les états des multiplets supersymétriques.

3.1.1 Supermultiplets sans masse

Posant $P^2 = 0$, on peut écrire le générateur associé aux translations P_μ sous la forme canonique en appliquant plusieurs transformations de Lorentz et rotations, tel que

$$P_\mu = (E, 0, 0, E). \quad (72)$$

Sachant d'après l'équation 51 que $\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = 2\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}P_\mu$, on écrit

$$\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}P_\mu = (\sigma^0 + \sigma^3)E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2E \end{bmatrix}. \quad (73)$$

Considérant $(\alpha, \dot{\alpha}) \in \{1, 2\}$, on détermine

$$\begin{bmatrix} \{Q_1, \bar{Q}_1\} & \{Q_1, \bar{Q}_2\} \\ \{Q_2, \bar{Q}_1\} & \{Q_2, \bar{Q}_2\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4E \end{bmatrix}. \quad (74)$$

Visant à agir sur les états du supermultiplet recherché, on remarque que

$$\{Q_1, \bar{Q}_1\} = 0, \quad (75)$$

impliquant que la norme au carré de la transformation sur l'état ω

$$\|Q_1 |\omega\rangle\|^2 = 0 = \|\bar{Q}_1 |\omega\rangle\|^2, \quad (76)$$

de sorte que

$$Q_1 |\omega\rangle = 0 = \bar{Q}_1 |\omega\rangle. \quad (77)$$

Cela signifie qu'en tant qu'opérateurs $Q_1 = \bar{Q}_1 = 0$ sur ce multiplet. La seule relation restante correspond à

$$\{Q_2, \bar{Q}_2\} = 4E. \quad (78)$$

Posant les opérateurs d'annihilation et de création

$$\alpha = \frac{1}{2\sqrt{E}}Q_2, \quad \alpha^\dagger = \frac{1}{2\sqrt{E}}\bar{Q}_2, \quad (79)$$

les relations d'anticommutation prennent la forme normalisée

$$\{\alpha, \alpha^\dagger\} = 1, \quad (80)$$

avec bien évidemment $\{\alpha, \alpha\} = 0$. On peut ainsi construire le supermultiplet en commençant d'un état $|\lambda\rangle$ tel que

$$\alpha |\lambda\rangle = 0. \quad (81)$$

Supposant une hélicité λ , l'application du générateur $M_{\mu\nu}$ associé aux transformations de Lorentz s'écrit

$$M_{12} |\lambda\rangle \equiv J_3 |\lambda\rangle = \lambda |\lambda\rangle. \quad (82)$$

Appliquant l'opérateur d'échelle $\alpha^\dagger |\lambda\rangle$, l'hélicité prend la forme

$$M_{12} \bar{Q}_2 |\lambda\rangle = \left(\bar{Q}_2 M_{12} + \frac{1}{2} \bar{Q}_2 \right) |\lambda\rangle = \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) \bar{Q}_2 |\lambda\rangle, \quad (83)$$

où la relation $[M_{12}, \bar{Q}_2] = \frac{1}{2} \bar{Q}_2$ fut utilisée. On détermine ainsi que

$$\alpha^\dagger |\lambda\rangle = \left| \lambda + \frac{1}{2} \right\rangle. \quad (84)$$

L'application de l'opérateur de création α^\dagger s'arrête toutefois ici puisque $(\alpha^\dagger)^2 = 0$ de sorte que

$$\alpha^\dagger \left| \lambda + \frac{1}{2} \right\rangle = 0. \quad (85)$$

Les supermultiplets sans masses sont ainsi composés d'un boson et d'un fermion : étant donné que les particules physiques doivent venir en représentations conjuguées respectant la symétrie CPT (charge, parité, temps), on doit ajouter le multiplet conjugué CPT ayant une hélicité inverse. Ce faisant, divers supermultiplets sont obtenus en fonction de l'état λ .

- Le supermultiplet *scalaire* est obtenu en posant $\lambda = 0$.

$$\alpha^\dagger |0\rangle = \left| \frac{1}{2} \right\rangle \quad (86)$$

Le multiplet complet est composé de deux états avec $\lambda = 0$ et d'un doublet avec $\lambda = \pm \frac{1}{2}$. Ces valeurs de λ correspondent aux degrés de liberté d'un scalaire complexe et d'un fermion de Weyl (chiral). Le supermultiplet scalaire définit donc l'état de spin 0 des sfermions

(superpartenaire des fermions) et de spin $\frac{1}{2}$ des fermions.

- Le supermultiplet *vectoriel* est obtenu à partir d'un état $\lambda = \frac{1}{2}$. De la même manière,

$$\alpha^\dagger \left| \frac{1}{2} \right\rangle = |1\rangle \quad (87)$$

Ajoutant le multiplet conjugué pour respecter CPT, on obtient deux paires d'états, une pour $\lambda = \pm\frac{1}{2}$ et l'autre pour $\lambda = \pm 1$. Ces degrés de liberté correspondent donc à ceux d'un fermion de Weyl et d'un vecteur sans masse, souvent interprété comme le boson de jauge. Le multiplet vectoriel définit donc l'état de spin $\frac{1}{2}$ du jaugino (superpartenaire du boson de jauge) et l'état de spin 1 du boson de jauge.

- Un supermultiplet supplémentaire (gravitationnel) est obtenu avec $\lambda = \frac{3}{2}$.

$$\alpha^\dagger \left| \frac{3}{2} \right\rangle = |2\rangle. \quad (88)$$

Ajoutant le conjugué CPT, ce multiplet possède une paire de degrés de liberté selon $\lambda = \pm 2$, que l'on interprète comme un *graviton* (boson) et une autre avec $\lambda = \pm\frac{3}{2}$ correspondant au *gravitino* (fermion), étant donné qu'il représente le superpartenaire du graviton.

Résumant, le supermultiplet scalaire permet d'extraire les fermions (Spin 1/2) et leurs superpartenaires : les sfermions (Spin 0). Le supermultiplet vectoriel représente quant à lui les porteurs d'interactions et caractérise les bosons de jauge (Spin 1) et les jauginos (Spin 1/2), aussi appelés superpartenaires fermioniques de bosons, à l'exception du gravitino, jaugino de spin 3/2 associé à un supermultiplet différent.

3.1.2 Supermultiplets massifs

Lorsqu'on considère un supermultiplet massif, $P^2 = M^2 > 0$, par transformations de Lorentz et rotations, on peut réécrire P_μ sous la forme

$$P_\mu = (M, 0, 0, 0). \quad (89)$$

Nous avons alors d'après l'équation 51,

$$\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu P_\mu = M\sigma^0 = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}, \quad (90)$$

la superalgèbre nous donne

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = 2M\delta_{\alpha\dot{\alpha}}. \quad (91)$$

On note cependant que le commutateur $[M_{12}, Q_1] = i(\sigma_{12})_1^1 Q_1 = \frac{1}{2}Q_1$. C'est alors Q_1 qui soulève l'hélicité, un peu de la même façon que précédemment avec \bar{Q}_2 . Ce faisant, on redéfinit les opérateurs d'échelle

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2M}}\bar{Q}_1, \quad \alpha_1^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2M}}Q_1, \quad (92)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2M}}Q_2, \quad \alpha_2^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2M}}\bar{Q}_2, \quad (93)$$

pour que les relations d'anticommutation canoniques de deux oscillateurs fermioniques deviennent

$$\{\alpha_a, \alpha_b^\dagger\} = \delta_{ab} = 1, 2. \quad (94)$$

Commençant par appliquer l'opérateur d'annihilation, $\alpha_a |\lambda\rangle = 0$ et $M_{12} |\lambda\rangle = \lambda |\lambda\rangle$, on construit le multiplet massif tel que

$$\alpha_1^\dagger |\lambda\rangle = \left| \lambda + \frac{1}{2} \right\rangle_1, \quad \alpha_2^\dagger |\lambda\rangle = \left| \lambda + \frac{1}{2} \right\rangle_2, \quad \alpha_1^\dagger \alpha_2^\dagger |\lambda\rangle = \left| \lambda + \frac{1}{2} \right\rangle. \quad (95)$$

Il y a maintenant 4 états, comparativement à 2 états dans le cas du multiplet sans masse. Nous avons ainsi 2 bosons et 2 fermions. Considérant deux exemples,

- Supermultiplet *massif scalaire* :

On commence avec l'état $\lambda = -\frac{1}{2}$ suivi de deux états avec $\lambda = 0$ et d'un avec $\lambda = \frac{1}{2}$. Ces états correspondent aux degrés de liberté d'un scalaire complexe *massif* et d'un fermion de Weyl. On ne peut toutefois pas écrire le terme de masse de Dirac habituel pour un fermion de Weyl puisqu'on considère des multiplets massifs. En effet, on doit écrire un *Majorana mass term*[3].

$$\mathcal{L} \supset m\epsilon^{\alpha\beta}\psi_\alpha\psi_\beta + h.c. \quad (96)$$

Cette notation un peu vague veut simplement dire que l'addition du terme $m\epsilon^{\alpha\beta}\psi_\alpha\psi_\beta$ avec son conjugué hermitien est élément du lagrangien. Fait intéressant, le nombre de degrés de liberté d'un supermultiplet scalaire massif est le même que celui d'un supermultiplet scalaire sans masse.

- Supermultiplet *massif vectoriel*,

Commençant avec $\lambda = 0$, deux états sont générés avec $\lambda = \frac{1}{2}$ et un seul avec $\lambda = 1$. Ajoutant le multiplet conjugué CPT, on se retrouve avec une paire avec $\lambda = \pm 1$, deux paires pour $\lambda = \pm \frac{1}{2}$ et deux états pour $\lambda = 0$. Ceci correspond donc à un vecteur massif ($\lambda = \pm 1, 0$), un scalaire réel et un fermion de Dirac (*i.e.* possède une antiparticule). Le nombre de degrés de liberté d'un supermultiplet vectoriel massif correspond au même que celui d'un supermultiplet vectoriel sans masse et même à celui d'un scalaire. Il s'agit donc d'un indice que la méthode utilisée pour traiter les vecteurs massifs dans une théorie supersymétrique se fera grâce à une version supersymétrique du mécanisme de Brout-Englert-Higgs.

En effet, ce mécanisme s'inscrivant dans la théorie électrofaible $SU(2)_L \times U(1)_Y$ [13] et générant une brisure de symétrie dans le modèle standard est basé sur l'idée que même si les équations du mouvement possèdent une symétrie, les solutions ne sont pas nécessairement symétriques. Ainsi, dans l'étude des degrés de liberté, seulement deux composantes indépendantes (deux polarisations transverses) sont nécessaires pour décrire un boson vectoriel sans masse. Toutefois, si le boson est massif, une troisième composante (polarisation transverse) est requise. Ce faisant, pour donner une masse aux bosons Z^0 et W^\pm on doit introduire un degré de liberté supplémentaire pour chacun. Le mécanisme de Brout-Englert-Higgs en introduit quatre (4 champs scalaires réels). Trois de ces champs servent à former les composantes longitudinales des bosons massifs Z^0 et W^\pm et le dernier correspond au boson de Higgs. Ainsi, considérant une théorie supersymétrique, les supermultiplets massifs vectoriels permettent d'introduire un ou plusieurs Higgs avec couplage faible permettant une analyse perturbative des comportements [13].

Sans trop se perdre dans le formalisme mathématique et une notation difficile d'approche, le message à retenir derrière cette étude des degrés de liberté des supermultiplets correspond au fait que pour chaque degré de liberté donné, c'est-à-dire pour chaque particule, le modèle supersymétrique lui agence *au moins* une superparticule appelée superpartenaire. Par convention, les superpartenaires sont dénotés $x \mapsto \tilde{x}$ en ajoutant le préfixe *s* devant le nom des fermions et le suffixe *ino* à la fin du nom des bosons. Par exemple, pour chaque fermion chiral du modèle standard SM, il y a un complexe scalaire avec les mêmes nombres quantiques. Les superpartenaires des quarks sont appelés *squarks* alors que ceux des leptons sont appelés *sleptons*. Toutefois, si la particule du modèle standard est elle-même un scalaire complexe (ex : Boson de Higgs), alors son superpartenaire sera un fermion chiral (spin 1/2) appelé, dans ce cas, *higgsino*. De plus, les bosons de jauge ont aussi un fermion chiral comme superpartenaire, appelé *jaugino*. Les superpartenaires des gluons W , Z et du photon sont appelés respectivement *gluinos*, *Wino*, *Zino* et *photino*.

La supersymétrie n'est pas une symétrie exacte de la nature [13]. En effet, on aurait déjà découvert les superpartenaires de chacune des particules du modèle standard puisque ceux-ci auraient la même masse. Actuellement, aucun superpartenaire du modèle supersymétrique n'a été observé mais les recherches se poursuivent.

Par souci de clarté et de contexte, on dresse un tableau du modèle standard.

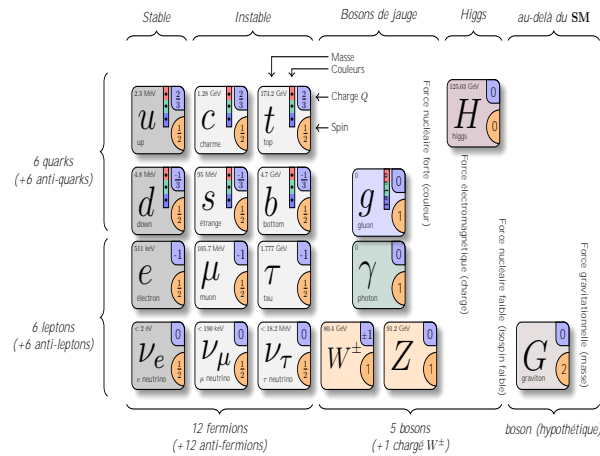


FIGURE 1 *Modèle standard* : les trois premières colonnes représentent les trois générations de fermions constituant la matière, chaque génération possédant 2 quarks et 2 leptons. Les quarks possèdent trois charges de couleur (rouge, vert et bleu) alors que le gluon en possède 8 (octet). Théoriquement, le gluon aurait $2^3 = 9$ degrés de liberté, toutefois ce nombre est réduit de un en raison du fait que les états complètement neutres du point de vue de la couleur ($r\bar{r} + v\bar{v} + b\bar{b} = 0$) n'interagissent pas fortement. La partie droite du tableau représente les bosons, particules vectorielles de spin entier (à l'exception du boson de Higgs, spin 0 et du graviton spin 2) porteurs d'interactions. La figure générée à l'aide de tikzpicture est inspirée du code disponible en ligne [4] et encouragée par les notes [13].

Dans l'optique d'établir un équivalent pour les superpartenaires du MSSM, il est essentiel d'introduire un nouveau nombre quantique, appelé parité R . Les particules du modèle standard ont une parité $R = +1$ alors que les superpartenaires ont une parité $R = -1$. Le produit des parités R est conservé, tout comme la parité spatiale. Ce faisant, la production de particules supersymétriques à partir de particules normales est possible par paires.

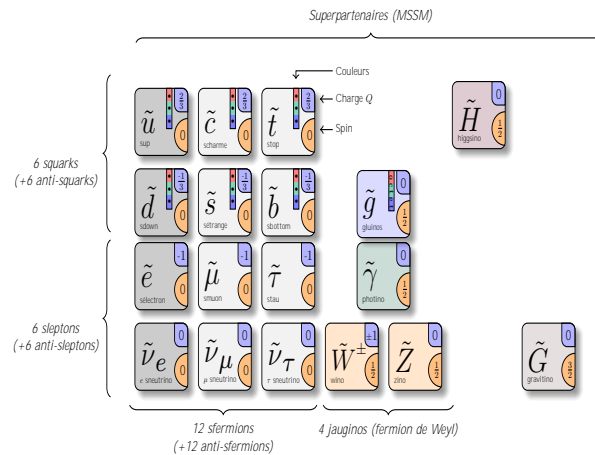


FIGURE 2 *Superpartenaires* : Extension au modèle standard et superparticules présentes dans le MSSM. Tous les superpartenaires ont les mêmes nombres de jauge, c'est à dire que la charge de couleur, la charge faible d'isospin et l'hypercharge sont conservés. La charge électrique Q l'est donc aussi. Toutefois, le spin est modifié, tel qu'expliqué précédemment. En e et, les sfermions (Spin 0) proviennent du supermultiplet scalaire alors que les jauginos (superpartenaires des bosons de jauge) sont extraits des supermultiplets vectoriels. Tous les superpartenaires ont une parité R de -1. Certaines particules/superparticules (*mixing, etc.*) s'inscrivant dans le MSSM ne sont pas représentées graphiquement par souci de clarté (voir le MSSM complet aux TABLEAUX 1 et 2 plus bas). Une supersymétrie non brisée impliquerait que la masse de chaque superpartenaire est équivalente à celle de son partenaire du SM, ce qui n'est pas le cas. En e et, aucun superpartenaire n'ayant été découvert au LHC, bien que recherchés [2], l'existence de telles particules sous-entend des masses nettement plus élevées que celles observées actuellement.

Les TABLEAUX 1 et 2 de la page suivante présentent les particules et les superparticules en fonction des supermultiplets chiral et de jauge dans le MSSM. Les partenaires x des superpartenaires \tilde{x} associés à un superchamp \hat{X} sont classifiés en fonction de leur spin. De plus, la représentation des groupes $(SU(3)_C, SU(2)_L, U(1)_Y)$ sous $SU(5)$ est présentée dans la dernière colonne par souci de clarté. Ces représentations et leurs implications seront expliquées plus tard, à la section 4.2.

Type	Superchamp	Spin 0	Spin 1/2	$(SU(3)_C, SU(2)_L, U(1)_Y)$
Quarks et squarks	\hat{Q}	\tilde{u}_L	u_L	$(\mathbf{3}, \mathbf{2}, \frac{1}{6})$
		\tilde{c}_L	c_L	
		\tilde{t}_L	t_L	
		\tilde{d}_L	d_L	
		\tilde{s}_L	s_L	
		\tilde{b}_L	b_L	
\hat{U}		\tilde{u}_R^*	u_R^\dagger	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, -\frac{2}{3})$
		\tilde{c}_R^*	c_R^\dagger	
		\tilde{t}_R^*	t_R^\dagger	
\hat{D}		\tilde{d}_R^*	d_R^\dagger	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \frac{1}{3})$
		\tilde{s}_R^*	s_R^\dagger	
		\tilde{b}_R^*	b_R^\dagger	
Leptons et sleptons	\hat{L}	$\tilde{\nu}_e$	ν_e	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})$
		$\tilde{\nu}_\mu$	ν_μ	
		$\tilde{\nu}_\tau$	ν_τ	
		\tilde{e}_L	e_L	
		$\tilde{\mu}_L$	μ_L	
		$\tilde{\tau}_L$	τ_L	
\hat{E}		\tilde{e}_R^*	e_R^\dagger	$(\bar{\mathbf{1}}, \mathbf{1}, 1)$
		$\tilde{\mu}_R^*$	μ_R^\dagger	
		$\tilde{\tau}_R^*$	τ_R^\dagger	
Higgs, higgsinos	\hat{H}_2	H_2^+	\tilde{H}_2^+	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, +\frac{1}{2})$
		H_2^0	\tilde{H}_2^0	
	\hat{H}_1	H_1^0	\tilde{H}_1^0	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})$
		H_1^-	\tilde{H}_1^-	

TABLEAU 1 Supermultiplets chiral dans le MSSM : Particules et superparticules contenues dans le superchamp associé et représentations dans le modèle SU(5).

Particules	Superchamp	Spin 1/2	Spin 1	$(SU(3)_C, SU(2)_L, U(1)_Y)$
Glunos et gluons	\hat{G}^a	\tilde{g}	g	$(\mathbf{8}, \mathbf{1}, 0)$
Winos et bosons W	\hat{W}^i	\tilde{W}^\pm \tilde{W}^0	W^\pm W^0	$(\mathbf{1}, \mathbf{3}, 0)$
Bino et boson B	\hat{B}	\tilde{B}^0	B^0	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0)$

TABLEAU 2 Supermultiplets de jauge dans le MSSM : Particules et superparticules contenues dans le superchamp associé et représentations dans le modèle SU(5).

3.2 Conservation de la parité R

Considérons la collision des particules a et b donnant lieu à la création de deux particules supersymétriques accompagnées d'un nombre arbitraire de particules normales dénoté ici par ζ . La conservation de la parité se vérifie comme suit :

$$a + b \rightarrow \tilde{c} + \tilde{d} + \zeta \quad (97)$$

La parité totale R_{tot} ,

$$R_{tot} = (+1) \cdot (+1) = (-1) \cdot (-1) \cdot (+1) \quad (98)$$

Par ailleurs, une particule supersymétrique pourra se désintégrer en particules plus légères, mais le processus implique toujours au moins une particule supersymétrique dans les produits de désintégration

$$\tilde{a} \rightarrow \tilde{b} + \zeta \quad \Rightarrow \quad R_{tot} = (-1) = (-1) \cdot (+1) \quad (99)$$

De plus, il doit exister une particule supersymétrique stable puisque la plus légère ne peut plus se désintégrer sans violer la conservation de la parité R .

$$\tilde{a} \nrightarrow b + c + \zeta \quad \Rightarrow \quad R_{tot} = (-1) \neq (+1) \cdot (+1) \cdot (+1) \quad (100)$$

La nature de la particule supersymétrique la plus légère (PSL) reste ainsi un mystère. Si celle-ci est le résidu de toutes les désintégrations de particules supersymétriques possibles depuis le début de l'Univers, on estime qu'elle existe en abondance. Malgré le fait qu'il s'agit de la particule supersymétrique la plus légère (*i.e.* possiblement générée dans les collisionneurs actuels), l'absence d'observation semble indiquer qu'elle est neutre et n'interagit pas fortement [13]. Les superpartenaires aspirants à ce titre correspondent ainsi au photino, au sneutrino et au gravitino. Un consensus vers le *photino* semble émerger des *superphysiciens*.

Ce faisant, lors d'une désintégration générant des photinos, une partie de l'énergie-impulsion initiale est transmise à ces particules invisibles. La signature caractéristique de la production de particules supersymétriques correspond ainsi à une énergie manquante dans la réaction. Par exemple, la production au LEP d'une paire sélectron-antisélectron dans une collision e^+e^- est suivie de la désintégration des deux sélectrons en électrons et photinos telle que représentée à la **FIGURE 3**.

Les photinos étant invisibles à la détection, un bilan des énergies et impulsions permettrait théoriquement de constater la présence de sélectrons. Aucun événement de ce type n'a été observé pour le moment, indiquant que la masse des superpartenaires est probablement trop élevée pour les limites des collisionneurs de particules actuels. Ce faisant, s'il y a supersymétrie, elle est forcément brisée aux échelles d'énergie observables actuellement [13]. Il s'agit d'ailleurs de la raison principale pour laquelle on qualifie la supersymétrie de *symétrie à haute énergie*.

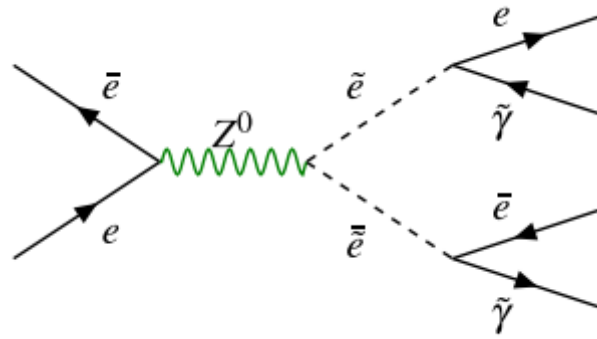


FIGURE 3 Production de paires de sélectrons-anti-sélectrons $\tilde{e}\bar{\tilde{e}}$ suivie de la désintégration des sélectrons en photinos et électrons. La figure est tirée des notes [13].

3.3 Références spécifiques

- ARGURIO Riccardo (2017) *Introduction to Supersymmetry*. Université Libre de Bruxelles, 159 pgs., URL homepages.ulb.ac.be/~rargurio/susycourse.pdf
- ARANA-CATANIA M. (2013) *The flavour of supersymmetry: Phenomenological implications of sfermion mixing*. URL arxiv.org/abs/1312.4888, arXiv: 1312.4888
- C. Burgard (2016) *Exemple: Standard model of physics*. URL www.texample.net/tikz/examples/model-physic/
- CORNWELL John (1991) *Group Theory in Physics, Volume 3 — Supersymmetries and Infinite-Dimensional Algebras*. EBook ISBN: 9780080917498
- LABELLE Patrick (2010) *Supersymmetry Demystified — A self teaching guide*. 1–476 pgs., iSBN 978-0-07-163641-4
- MARLEAU Luc (2019) *Introduction à la physique des particules*. Département de physique, génie physique et optique. Université Laval, PHY-3004
- MARTIN Stephen P. (1998) *A Supersymmetry Primer*. arXiv:hep-ph/9709356, volume 18, pgs. 1–98, doi: 10.1142/9789812839657_0001, URL <http://arxiv.org/abs/hep-ph/9709356>, arXiv: hep-ph/9709356
- PESKIN Michael E. (2008) *Supersymmetry in Elementary Particle Physics*. arXiv:0801.1928 [hep-ph], URL <http://arxiv.org/abs/0801.1928>, arXiv: 0801.1928

4. Problèmes réglés et causés par le MSSM (Anton Zhekov)

4.1 Problème de hiérarchie

L'un des problèmes du MS et, par le fait même, l'un des points qui justifient la nécessité du MSSM est le problème de hiérarchie duquel découle le problème d'ajustement fin. Ce problème se manifeste par une différence importante entre la masse théorique et la masse observée expérimentalement pour certaines particules. Ceci découle du fait que m_{H}^2 (le paramètre de masse carré du Higgs) reçoit d'importantes corrections quantiques en raison du couplage (direct ou indirect) entre une particule ou un phénomène physique quelconque et le champ de Higgs.

Considérons, par exemple, le couplage entre le champ de Higgs et une paire fermion-antifermion illustré par le diagramme de Feynman de la FIGURE 4. N'importe lequel des quarks ou leptons du modèle standard peut jouer le rôle de f . Ce dernier diagramme donne, en passant par une

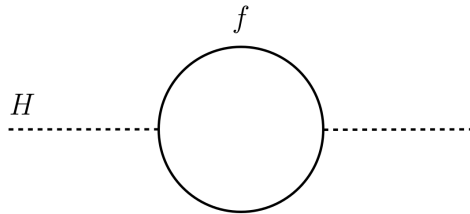


FIGURE 4 Couplage entre le champ de Higgs et une paire fermion-antifermion.

intégrale de boucle, une correction au premier ordre à la masse du boson de Higgs de

$$\Delta m_{\text{H}}^2 = -\frac{|\lambda_f|^2}{8\pi^2} \Lambda^2 + \dots \quad (101)$$

Ici, λ_f mesure l'auto-interaction du fermion dans le champ de Higgs et est de l'ordre de l'unité et Λ est l'énergie de coupure qui régule l'intégrale de boucle. Λ peut être interprétée comme l'énergie à laquelle de nouvelles propriétés physiques apparaissent qui ne sont pas expliquées par le modèle standard. On s'attend à ce que de telles propriétés apparaissent lorsque l'énergie est d'au plus de l'ordre de la masse de Planck $M_{\text{P}} \simeq 1.2 \times 10^{18}$ GeV, ainsi il est justifié de supposer que $\Lambda \sim 10^{18}$. Or, le paramètre de masse au carré du boson de Higgs, tel que mesuré expérimentalement, est de $m_{\text{H}}^2 = -(92.9 \text{ GeV})^2$.

Ainsi, il semble que la correction Δm_{H} soit plusieurs ordres de grandeur supérieure à la valeur attendue de m_{H} . Ceci mène au problème *d'ajustement fin* : il faut que les constantes du modèle standard concordent de manière précise afin que la masse avant corrections m_{H} s'annule avec les corrections afin d'avoir une masse de l'ordre de celle observée.

C'est là le *problème de hiérarchie*, à savoir pourquoi la masse du boson de Higgs est si faible, alors que les corrections d'auto-interactions devraient plutôt l'amener à des grandeurs

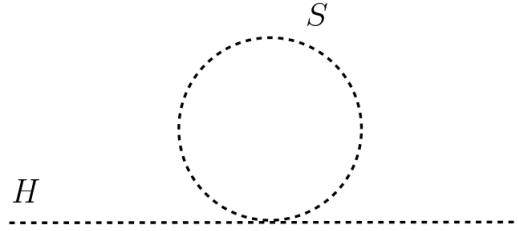


FIGURE 5 Couplage entre le champ de Higgs et une particule scalaire S .

de l'ordre de la masse de Planck. Ceci est d'autant plus problématique, puisque les leptons, quarks et bosons de jauge électrofaible Z^0 et W^\pm du modèle standard tirent tous leur masse du champ de Higgs. Toutes les particules du MS ont donc cette dépendance quadratique avec l'énergie de coupure Λ .

Une correction à m_{H}^2 est également causée par le couplage entre le champ de Higgs et une particule scalaire complexe S de masse m_S relativement élevée. Ce couplage est illustré par le diagramme de Feynman à la FIGURE 5 et la correction Δm_{H}^2 est donnée par :

$$\Delta m_{\text{H}}^2 = \frac{\lambda_S}{16\pi^2} (\Lambda^2 - 2m_S^2 \ln(\Lambda/m_S) + \dots). \quad (102)$$

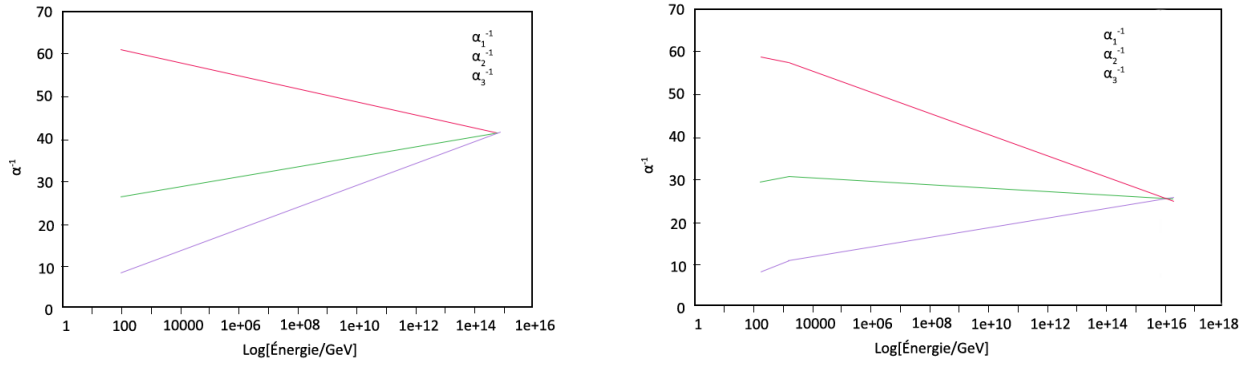
C'est là qu'intervient la solution proposée par SUSY : associer deux particules scalaires complexes à chaque fermion du modèle standard. La correction totale s'obtient en combinant les corrections des équations 101 et 102 :

$$\Delta m_{\text{H}}^2 = \Lambda^2 \left(\frac{\lambda_S}{8\pi^2} - \frac{|\lambda_f|^2}{8\pi^2} \right) + \dots \quad (103)$$

Ainsi, si chaque fermion F est accompagné de deux scalaires S tels que $\lambda_S = |\lambda_F|^2$, il est possible d'éliminer le problème de hiérarchie sans avoir recours à l'ajustement fin. Le fait d'avoir deux S associés à chaque F survient naturellement lorsqu'on suppose qu'il existe une symétrie mettant en relation les fermions et les bosons. Les sections précédentes introduisaient d'ailleurs la transformation de supersymétrie, générée par un opérateur Q , qui change un fermion en boson et vice-versa. C'est la conséquence principale de la supersymétrie.

4.2 Unification du couplage de jauge : le modèle $SU(5)$

Une particularité intéressante du modèle standard est le fait que les quarks et leptons de chaque génération se regroupent en des multiplets du groupe de jauge simple $SU(5)$. Ceci suggère que, à de très courtes distances, le groupe $SU(5)$ serait la symétrie de jauge fondamentale : c'est *la théorie de la grande unification*. Lorsque cette symétrie est spontanément brisée, on obtient le groupe de jauge du modèle standard $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Une brisure spontanée de symétrie se produit lorsqu'un lagrangien est symétrique sous une certaine transformation,



(a) Couplages dans le modèle $SU(5)$ en fonction de l'énergie (b) Couplages dans le MSSM en fonction de l'énergie

FIGURE 6 Constantes de couplage en fonction de l'énergie.

mais pas ses solutions autour d'un point d'équilibre. La symétrie est donc spontanément brisée autour de ce point d'équilibre.

Ici, les groupes de symétrie $U(1)_Y$, $SU(2)_L$ et $SU(3)_c$ sont associés à l'électrodynamique quantique, à l'interaction faible et à la chromodynamique quantique respectivement. L'idée est que les trois constantes de couplage de jauge associées devraient converger, à des énergies élevées, vers une seule valeur comme on peut voir à la FIGURE 6 (a). Il est possible d'arriver à ce constat en effectuant les intégrales sur les boucles appropriées pour obtenir les constantes de couplage.

Cette unification se produit naturellement¹ aux échelles d'énergie de SUSY (~ 1 TeV) comme on peut voir à la FIGURE 6 (b). Il est donc pertinent d'étudier des modèles d'unification de jauge dotés d'une supersymétrie. Pour se familiariser avec ce genre de théories, on présente une théorie d'unification de jauge du modèle standard, le modèle $SU(5)$, qui peut être rendu supersymétrique en y ajoutant les champs nécessaires pour satisfaire à l'algèbre SUSY, comme les sections précédentes l'ont montré. En d'autres mots, un champ de fermion est ajouté pour chaque champ de boson et vice-versa.

Le modèle $SU(5)$ ² est le plus simple qui permette d'inclure toutes les symétries du modèle standard.

$$SU(5) \supset SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y. \quad (104)$$

Ce modèle se divise en trois parties, soit les trois catégories de particules qu'il contient.

- **Les bosons de jauge** : Ils se retrouvent dans la représentation des générateurs. Le nombre de générateurs, soit $25^2 - 1 = 24$ pour le groupe $SU(5)$, indique le nombre de

1. C'est-à-dire sans la nécessité d'avoir recours à une unification de jauge.

2. Initialement proposé par Georgi et Glashow.

bosons de jauge. Les groupes $SU(3)$, $SU(2)$ et $U(1)$ contiennent respectivement 8, 3 et 1 générateurs. Ainsi,

$$\begin{array}{ccccccc}
 SU(5) & \supset & SU(3)_c & \otimes & SU(2)_L & \otimes & U(1)_Y \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbf{24} & > & \mathbf{8} & + & \mathbf{3} & + & \mathbf{1} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 8 \text{ gluons} & & W^\pm, Z^0 & & \gamma
 \end{array} \quad (105)$$

Il est possible d'exprimer la représentation $\mathbf{24}$ comme la matrice $A \equiv \frac{\lambda_a}{\sqrt{2}} A^a$ où les λ_a sont les générateurs de $SU(5)$ ³,

$$A = \begin{pmatrix} G_{11} - \frac{2B}{\sqrt{30}} & G_{12} & G_{13} & \bar{X}_1 & \bar{Y}_1 \\ G_{21} & G_{22} - \frac{2B}{\sqrt{30}} & G_{23} & \bar{X}_2 & \bar{Y}_2 \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} - \frac{2B}{\sqrt{30}} & \bar{X}_3 & \bar{Y}_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 & A^3 + \frac{3B}{\sqrt{30}} & W^+ \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & W^- & -A^3 + \frac{3B}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}. \quad (106)$$

où les G_{ij} sont les champs de jauge de $SU(3)_c$, A^3 et $W^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(A^1 \pm iA^2)$ sont les champs de jauge de $SU(2)_L$ et B est le champ de jauge de $U(1)_Y$.

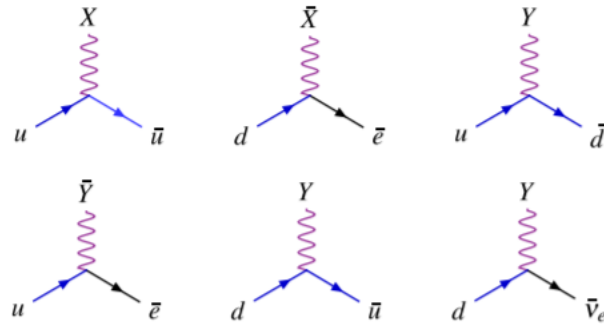
Il est également possible de décomposer la représentation adjointe $\mathbf{24}$ de $SU(5)$ en représentations adjointes de $SU(3)_c$ et $SU(2)_L$. $\mathbf{24}$ est une représentation réductible, c'est-à-dire que si l'on représentait $\mathbf{24}$ sous forme de matrice elle serait diagonale par blocs. Ces blocs sont les sous-représentations. On peut donc écrire

$$\begin{aligned}
 SU(5) &\longrightarrow (SU(3)_c, SU(2)_L) \\
 \mathbf{24} &= (\mathbf{8}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{3}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{2}).
 \end{aligned} \quad (107)$$

ici, $(\mathbf{3}, \mathbf{2})$ par exemple, signifie que la particule est dans la représentation $\mathbf{3}$ de $SU(3)_c$ et dans le doublet $\mathbf{2}$ de $SU(2)_L$. Les sous-représentations, en ordre d'apparition dans l'équation 107, représentent respectivement les 8 gluons, les bosons W^\pm et Z^0 , le photon γ , les leptoquarks X et Y et les leptoquarks \bar{X} et \bar{Y} .

Les leptoquarks sont douze bosons de jauge supposés lourds. Trois d'entre eux, les Y , ont une charge de $-\frac{1}{3}$ et trois autres, les X , ont une charge de $-\frac{4}{3}$ (les six autres sont leurs antiparticules. Ils permettent l'interaction entre les quarks et les leptons, en transformant les uns en les seconds (voir FIGURE 7).

3. Appelées les matrices de Gell-Mann.

FIGURE 7 interactions leptons-quarks-leptoquarks dans $SU(5)$.

- **Les fermions** : Ils se retrouvent dans les représentations irréductibles de $SU(5)$. Les fermions de la première génération correspondent aux représentations $\mathbf{\bar{5}}$ et $\mathbf{10}$. La représentation fondamentale de $SU(5)$ s'obtient à partir de la somme directe des représentations fondamentales de $SU(3)$ et $SU(2)$,

$$\mathbf{5} = \mathbf{3} \oplus \mathbf{2} \implies \mathbf{5} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ l \\ \nu_l \end{pmatrix}. \quad (108)$$

La représentation antifondamentale des fermions, $\mathbf{\bar{5}} = \mathbf{\bar{3}} \oplus \mathbf{2}$ est donc, sous forme vectorielle

$$\mathbf{\bar{5}} = \begin{pmatrix} \bar{d}_1^c \\ \bar{d}_2^c \\ \bar{d}_3^c \\ e^- \\ -\nu_e \end{pmatrix}. \quad (109)$$

On fait ensuite le produit tensoriel de deux représentations fondamentales $\mathbf{5}$

$$\mathbf{5} \otimes \mathbf{5} = \mathbf{10} + \mathbf{15}. \quad (110)$$

Ici on a une partie symétrique $\mathbf{15}$ et une partie antisymétrique $\mathbf{10}$. La partie antisymétrique contient le reste des fermions, elle peut être représentée sous forme matricielle

comme

$$\mathbf{10} = \begin{pmatrix} 0 & u_3^c & u_2^c & -u_1 & -d_1 \\ -u_3^c & 0 & u_1^c & -u_2 & -d_2 \\ -u_2^c & -u_1^c & 0 & -u_3 & -d_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 & e^+ \\ d_1 & d_2 & d_3 & e^- & 0 \end{pmatrix}. \quad (111)$$

Ici c indique le conjugué de charge (antiparticule) de la particule.

- **Les interactions** : On ajoute aux couplages du modèle standard ceux de la FIGURE 7.

Néanmoins, ces nouvelles interactions impliquent la désintégration du proton. En e et, les leptoquarks peuvent changer un quark en lepton à l'intérieur d'un proton et permettre sa désintégration. Ceci n'est pas un problème en soi, cependant le temps de désintégration théorique est de l'ordre de 10^{29} années ce qui est en contradiction avec les observations expérimentales qui le placent plutôt entre 10^{31} et 10^{33} années. La limite supérieure si on introduit une supersymétrie à $SU(5)$ est plutôt de l'ordre de 10^{39} années, d'où l'intérêt d'une théorie de l'unification minimalement supersymétrique.

4.3 Matière noire

La densité de matière noire froide est estimée, par les astrophysiciens, à :

$$\rho_{\text{MN}} \approx 1.2 \times 10^{-6} \text{ GeV/cm}^3. \quad (112)$$

Le MSSM est une théorie dotée d'une parité R . La parité R est définie comme :

$$P_R = (-1)^{3B+2L+s}, \quad (113)$$

c'est une symétrie \mathbb{Z}_2 qui empêche certains couplages du MSSM. Les couplages en question font en sorte que les nombres baryonique et leptonique ne sont pas conservés (notamment les couplages illustrés à la FIGURE 7). Une telle symétrie est nécessaire, puisque la conservation des nombres L et B est une évidence expérimentale.

Un aspect alléchant d'une théorie dotée d'une conservation de la parité R est que la particule supersymétrique la plus légère (LSP) est parfaitement stable. Il est possible qu'une telle LSP électriquement neutre soit une bonne candidate pour la matière noire. Il y a trois particules potentielles : le *sneutrino* le plus léger, le *gravitino* et le plus léger des *neutralinos*. Le sneutrino a été écarté par des recherches expérimentales, le gravitino interagit trop faiblement pour être détecté de manière directe. Seul le neutralino se présente donc comme un potentiel candidat pour la matière noire. On se concentrera donc ici sur cette éventualité.

Les neutralinos, au nombre de quatre dans le MSSM, sont des fermions de Majorana électriquement neutres. Le plus léger des quatre est stable si la parité R est conservée. Ils sont des combinaisons de certains superpartenaires, soit le bino, le wino neutre et le higgsino neutre.

La densité cosmique de la matière noire peut être estimée à partir de quelques suppositions quant à sa nature. La particule formant la matière noire doit être stable, neutre et interagir faiblement. De plus, une telle particule doit pouvoir être créée par paires à des températures suffisamment élevées. On suppose également que ces particules étaient en équilibre thermique à un moment donné de l'univers primitif. De telles particules sont communément appelées WIMP⁴. À partir de ces suppositions, il est possible de calculer la densité théorique de la matière noire :

$$\Omega_N = \frac{s_0}{\rho_c} \sqrt{\frac{45}{\pi g_*}} \frac{1}{\xi_F m_{P1}} \frac{1}{\langle \sigma v \rangle}, \quad (114)$$

où s_0 est la densité d'entropie actuelle de l'univers, ρ_c est la densité critique de l'univers, g_* est le nombre de degrés de liberté relativistes, $\xi_F = T_F/m \sim 1/25$ est un paramètre déterminant la température à laquelle la densité du WIMP est figée.

Ce qui nous intéresse ici, c'est la valeur numérique de la valeur attendue $\langle \sigma v \rangle$ où σ est la section efficace de l'annihilation du neutralino avec lui-même et v est la vitesse relative entre deux neutralinos entrant en collision. L'équation 114 donne

$$\langle \sigma v \rangle \sim 1 \text{ pb}. \quad (115)$$

Cette valeur correspond à la section efficace typique des interactions électrofaibles à des énergies de l'ordre de 100 GeV, la particule d'échange ayant une masse $M = 100$ GeV.

Nous allons maintenant vérifier si la section efficace d'annihilation d'une paire de neutralinos correspond à celle donnée à l'équation 115. Posons un modèle simple d'annihilation du neutralino dans lequel ce dernier est un bino pur et où l'annihilation est dominée par l'échange d'un slepton comme montré à la FIGURE 8. Dans ce cas, la section efficace d'annihilation est donnée par

$$v \frac{d\sigma}{d \cos \theta} = \pi \alpha^2 m_N^2 \left| \frac{1}{c_w} \right|^2 \left| \frac{1}{m_{\tilde{\ell}}^2 - t} - \frac{1}{m_{\tilde{\ell}}^2 - u} \right|^2, \quad (116)$$

où m_N est la masse du neutralino, $m_{\tilde{\ell}}$ est la masse du slepton et la masse du lepton a été négligée. t et u sont les variables de Mandelstam. Cette expression est de l'ordre de l'équation 115. Cependant, au seuil $t = u$ la section efficace est nulle et la densité estimée de cette manière est trop grande.

Il est possible d'obtenir une valeur plus réaliste de la densité de neutralinos en introduisant

4. *Weakly interacting massive particle.*

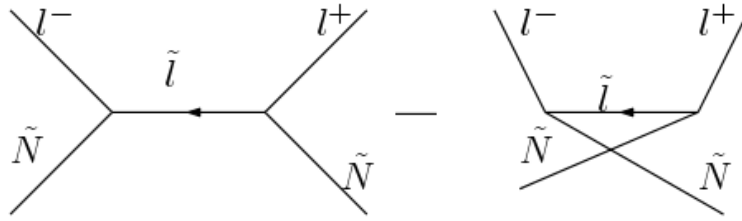


FIGURE 8 Diagrammes de l'annihilation la plus simple d'une paire de neutralinos passant par l'échange d'un slepton $\tilde{\ell}$.

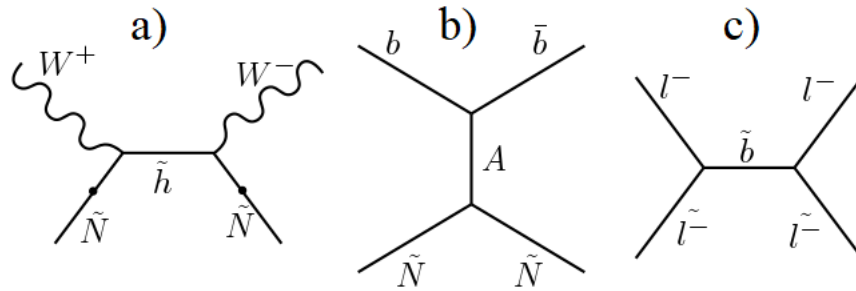


FIGURE 9 Trois mécanismes d'annihilation qui permettent d'obtenir une section efficace plus réaliste : a) mélange jaugino-Higgsino, b) annihilation de résonance avec le boson de Higgs A^0 , c) coannihilation avec une autre particule supersymétrique, ici $\tilde{\ell}$.

des mécanismes d'annihilation un peu plus compliqués illustrés à la FIGURE 9.

Dans le premier mécanisme, a), les neutralinos s'annihilent pour donner des bosons vectoriels. La section efficace de cette réaction peut atteindre 50 pb, il n'en faut donc pas beaucoup. Dans la seconde réaction, b), les neutralinos s'annihilent par l'échange d'un boson de Higgs. Lorsque la masse du Higgs, m_A est proche du seuil du neutralino $2m_N$, la section efficace est amplifiée par résonance et la section efficace peut atteindre 50 pb.

Le dernier mécanisme, c), est la coannihilation. S'il existe une particule supersymétrique dont la masse est suffisamment proche de celle du neutralino, sa densité sera en équilibre avec la densité du neutralino. On a les réactions suivantes :

$$\tilde{\ell} + \tilde{N} \rightarrow \ell^- + \gamma, \quad \tilde{\ell} + \tilde{\ell} \rightarrow \ell^- + \ell^-. \quad (117)$$

Ces réactions pourraient être le mécanisme dominant de l'annihilation des neutralinos. Les sections efficaces de ses réactions devront être prédites à partir de données collectées dans un collisionneur de particules. Si elles collent avec l'équation 115, cela renforcerait l'idée que le neutralino est le composant de la matière noire.

4.4 Problème μ

Le problème μ survient dans les théories supersymétriques en physique des particules. μ est le paramètre de masse supersymétrique de Higgs et il devrait être de l'ordre de 100-1000 GeV, beaucoup plus petit que l'échelle de Planck qui est l'échelle de coupure (10^{18} GeV). Cependant, μ est de l'ordre de grandeur de la brisure douce de la supersymétrie. Le problème est le suivant : pourquoi μ est-il à ce point plus petit que l'énergie de coupure et pourquoi est-il de l'ordre de grandeur de la brisure douce de la supersymétrie ?

Le problème μ peut, entre autres, être réglé avec une extension du MSSM nommée le NMSSM (*next-to-minimal supersymmetric standard model*) obtenue en ajoutant un nouveau supermultiplet chiral qui a une parité paire. Le superpotentiel du NMSSM est

$$W_{NMSSM} = W_{MSSM} + \lambda S H_u H_d + \frac{1}{3} \kappa S^3 + \frac{1}{2} \mu_S S^2, \quad (118)$$

où S désigne le nouveau supermultiplet chiral et W_{MSSM} est donné par :

$$W_{MSSM} = \mu H_u H_d + y_u H_u Q U^c + y_d H_d Q D^c + y_l H_d L E^c. \quad (119)$$

Sans nous attarder sur les détails, on compare les termes $\lambda S H_u H_d$ et $\mu H_u H_d$ dans les équations 118 et 119 et on définit

$$\mu_{\text{eff}} = \lambda \langle S \rangle \quad (120)$$

Ainsi, μ se trouve à être déterminé par λ et $\langle S \rangle$ au lieu d'être un paramètre libre, ce qui règle le problème μ .

4.5 Non-détection des superpartenaires

Les ébauches de la supersymétrie ont été réalisées dans les années 70, peu après l'élaboration de la théorie des cordes et l'élaboration d'une théorie de la force nucléaire forte basée sur la matrice S . C'est en 2007 que le LHC a été mis sur pieds, après la mise en place du *Super Proton Synchrotron* (SPS) et du *Large Electron-Positron* (LEP), dans les années 70 et 80, respectivement. Chaque nouveau collisionneur a été un échec cuisant pour la supersymétrie.

Le fait est que la supersymétrie, et les extensions du modèle standard, plus généralement, ont fait en sorte de stimuler la construction des collisionneurs. Chaque collisionneur mis sur pieds avait son lot de théories à vérifier, et le LHC a permis, entre autres, de détecter le boson de Higgs, ce que le SPS et le LEP n'ont pas été en mesure de faire. La supersymétrie, par les problèmes qu'elle résout, laissait croire qu'elle constituait une solution plausible. Toutefois, les superpartenaires prévus par la supersymétrie échappent encore à la détection, et ce, malgré les deux séries d'expériences réalisées au LHC. Cela freine les espoirs envers cette théorie.

En effet, de façon à confirmer la supersymétrie, il faudrait pouvoir détecter des superpartenaires. D'après les sections précédentes, ils seraient de masses équivalentes à leurs contreparties du modèle standard. Or, les échelles d'énergie du LHC devraient suffire pour permettre leur détection si tel était le cas. Cela signifie que les superpartenaires doivent avoir des masses qui ne correspondent pas tout à fait aux prédictions, d'où on parle d'une brisure de symétrie.

Les essais actuels portent sur la recherche du quark stop. La contribution la plus forte aux corrections de la masse du boson de Higgs provient du quark top, lesquelles seraient contrebalancées par les contributions du quark stop. En effet, les contributions instables du problème de hiérarchie ne viennent pas en quantités égales et le quark top en est particulièrement responsable. Certaines des expérimentations réalisées au LHC portent donc directement sur la recherche du quark stop, mais rien de concluant n'en a été tiré. Si le quark stop existe, sa masse doit excéder approximativement 1000 GeV, ce qui est d'un facteur 10 au-dessus des masses des autres porteurs de force nucléaire faible.

Or, la méthodologie employée est plus efficace si la masse de la particule supersymétrique la plus légère (LSP) est effectivement légère, ce qu'on ne peut déterminer puisqu'il s'agit d'un paramètre de la théorie. Puisque le LSP détermine la quantité d'énergie manquante dans la reconstruction des collisions, une trop faible contribution du LSP permet aux particules recherchées de se fondre dans le bruit de fond. C'est le cas lorsque le LSP est plutôt lourd, d'où la supersymétrie pourrait être confirmée à l'aide de matériel plus sophistiqué encore.

4.6 Références spécifiques

- AITCHISON Ian JR (2005) *Supersymmetry and the MSSM: An Elementary introduction*. arXiv preprint hep-ph/0505105
- MARLEAU Luc (2019) *Introduction à la physique des particules*. Département de physique, génie physique et optique. Université Laval, PHY-3004
- MARTIN Stephen P. (1998) *A Supersymmetry Primer*. arXiv:hep-ph/9709356, volume 18, pgs. 1–98, doi: 10.1142/9789812839657_0001, URL <http://arxiv.org/abs/hep-ph/9709356>, arXiv: hep-ph/9709356
- PESKIN Michael E. (2008) *Supersymmetry in Elementary Particle Physics*. arXiv:0801.1928 [hep-ph], URL <http://arxiv.org/abs/0801.1928>, arXiv: 0801.1928
- ROMAO Miguel Crispim (2011) *The SU (5) grand unification theory revisited*. Instituto Superior Technico, Lisboa
- REDLINGER George, DEJONG Paul (2017) *Broken symmetry: searches for supersymmetry at the LHC*. Atlas, CERN, Genève, Suisse
- SCHWARZ John H. (2012) *The Early History of String Theory and Supersymmetry*. arXiv:1201.0981 [hep-th, physics:physics], URL arxiv.org/abs/1201.0981, arXiv: 1201.0981

5. Conclusion

Bien qu'aucune de ses conclusions n'ait pu être vérifiée expérimentalement, le modèle supersymétrique fournit une solution esthétique et intrigante aux problèmes actuels en physique des particules.

La simple introduction d'un degré de symétrie supplémentaire génère de la diversité dans un modèle particulaire. C'est le cas pour chacune des symétries admises dans le modèle standard. En ajoutant une supersymétrie entre fermions et bosons, la quantité de particules du modèle double effectivement pour former le modèle standard supersymétrique minimal.

En effet, l'étude des degrés de liberté des supermultiplets indique que pour chaque particule, le MSSM lui agence *au moins* une superparticule. Pour les supermultiplets sans masse, le supermultiplet *scalaire* permet notamment d'extraire les fermions et les superfermions alors que le supermultiplet *vecteuriel* représente les porteurs d'interactions en caractérisant les bosons de jauge et leurs superpartenaires fermioniques, les jauginos. Le supermultiplet gravitationnel permet quant à lui d'introduire le graviton et son complice, le gravitino. De plus, l'étude en surface des supermultiplets massifs nous renseigne sur le fait que la méthode utilisée pour traiter les vecteurs massifs dans une théorie supersymétrique se fera grâce à une version supersymétrique du mécanisme de Brout-Englert-Higgs, introduisant de façon explicite quelques termes au lagrangien pour briser la supersymétrie et préserver certaines propriétés.

Finalement, la supersymétrie fournit des solutions naturelles au problème de la hiérarchie, à l'unification du couplage de jauge et à l'existence de la matière noire. En effet, certaines corrections à la masse du boson de Higgs peuvent s'annuler avec l'introduction de la supersymétrie, de telle façon que l'ordre de grandeur de la valeur attendue se rapproche de celle observée. De même, la supersymétrie unifie les constantes de couplage à haute énergie et fournit des candidats à la matière noire, le sneutrino, le gravitino et un neutralino.

Malheureusement, les superpartenaires résistent à la détection, et ce, malgré le niveau de sophistication des expériences réalisées au LHC. Cela laisse croire que, s'il existe une supersymétrie et qu'elle est modérément brisée, l'échelle d'énergie du LHC n'est probablement pas assez étendue pour qu'elle soit observée. Il faudra attendre la prochaine génération de collisionneurs pour espérer confirmer la supersymétrie.

Références

- [1] AITCHISON Ian JR (2005) *Supersymmetry and the MSSM : An Elementary introduction*. arXiv preprint hep-ph/0505105.
- [2] ARANA-CATANIA M. (2013) *The flavour of supersymmetry : Phenomenological implications of sfermion mixing*. URL arxiv.org/abs/1312.4888, arXiv : 1312.4888.
- [3] ARGURIO Riccardo (2017) *Introduction to Supersymmetry*. Université Libre de Bruxelles, 159 pgs., URL homepages.ulb.ac.be/~rargurio/susycourse.pdf.
- [4] C. Burgard (2016) *Exemple : Standard model of physics*. URL www.texample.net/tikz/examples/model-physi cs/.
- [5] COLEMAN Sidney, MANDULA Je rey (1967) *All Possible Symmetries of the S Matrix*, volume 159. 1251–1256 pgs., doi: 10.1103/PhysRev.159.1251.
- [6] CORNWELL John (1991) *Group Theory in Physics, Volume 3 — Supersymmetries and Infinite-Dimensional Algebras*. EBook ISBN : 9780080917498.
- [7] DIAZ-CRUZ J. LORENZO, LOPEZ Bryan Larios, MEZA-ALDAMA O., PEREZ Jonathan Reyes (2015) *Weyl spinors and the helicity formalism*. URL arxiv.org/abs/1511.07477v1.
- [8] FERRARA S., ZUMINO B., WESS J. (1974) *Supergauge multiplets and superfields*, volume 51. 239–241 pgs., doi: 10.1016/0370-2693(74)90283-4, URL www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269374902834.
- [9] HAAG Rudolf, LOPUSZANSKI Jan T., SOHNIUS Martin (1975) *All possible generators of supersymmetries of the S-matrix*, volume 88. 257–274 pgs., doi: 10.1016/0550-3213(75)90279-5.
- [10] HAHN Thomas (2018) *An Introduction to Supersymmetry*. ETH Zurich, URL www.ethz.ch/content/dam/ethz/special-interest/phys/theoretical-physi cs/i tp-dam/documents/gaberdi el /proseminar_fs2018/18_Hahn.pdf.
- [11] KRIPPENDORF Sven, QUEVEDO Fernando, SCHLOTTERER Oliver (2010) *Cambridge Lectures on Supersymmetry and Extra Dimensions*. URL arxiv.org/abs/1011.1491, arXiv : 1011.1491.
- [12] LABELLE Patrick (2010) *Supersymmetry Demystified — A self teaching guide*. 1–476 pgs., ISBN 978-0-07-163641-4.
- [13] MARLEAU Luc (2019) *Introduction à la physique des particules*. Département de physique, génie physique et optique. Université Laval, PHY-3004.
- [14] MARTIN Stephen P. (1998) *A Supersymmetry Primer*. arXiv :hep-ph/9709356, volume 18, pgs. 1–98, doi: 10.1142/9789812839657_0001, URL <http://arxiv.org/abs/hep-ph/9709356>, arXiv : hep-ph/9709356.

- [15] nLAB (2019) *graded algebra*. En ligne, URL ncatlab.org/nlab/show/graded+algebra.
- [16] nLAB (2019) *supercharge*. En ligne, URL ncatlab.org/nlab/show/supercharge.
- [17] PESKIN Michael E. (2008) *Supersymmetry in Elementary Particle Physics*. arXiv :0801.1928 [hep-ph], URL <http://arxiv.org/abs/0801.1928>, arXiv : 0801.1928.
- [18] REDLINGER George, DEJONG Paul (2017) *Broken symmetry : searches for supersymmetry at the LHC*. Atlas, CERN, Genève, Suisse.
- [19] ROMAO Miguel Crispim (2011) *The SU (5) grand unification theory revisited*. Instituto Superior Technico, Lisboa.
- [20] ROSENFELD Azriel (1969) *An introduction to algebraic structures*. Allyn And Bacon, 247 pgs.
- [21] SALAM Abdus, STRATHDEE J. A. (1974) *Supergauge Transformations*, volume B76. 477–482 pgs., doi: 10.1016/0550-3213(74)90537-9.
- [22] SCHWARZ John H. (2012) *The Early History of String Theory and Supersymmetry*. arXiv :1201.0981 [hep-th, physics :physics], URL arxiv.org/abs/1201.0981, arXiv : 1201.0981.
- [23] TANEDO Flip (2019) *Helicity, Chirality, Mass, and the Higgs*. URL www.quantumdiaries.org/2011/06/19/helicity-chirality-mass-and-the-higgs/.