

La démystification de la théorie des cordes

Travail remis au Professeur Luc Marleau
dans le cadre du cours
PHY-3501 Physique des particules

Par
Louis-Philippe Guinard (111 162 674)
Département de physique, de génie physique et d'optique
Faculté des sciences et de génie, Université Laval
`louis-philippe.guinard.1@ulaval.ca`

Travail remis le mardi 16 avril 2019

Table des matières

1	Introduction et historique	3
2	Dimensions supplémentaires	5
3	Théorie de Kaluza-Klein	8
4	D-Branes	10
5	Conclusion	16

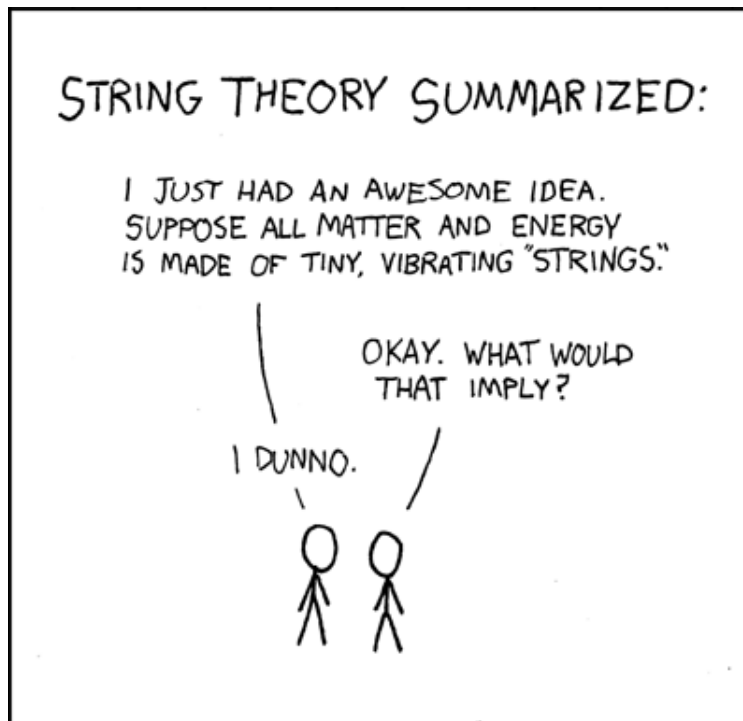


Figure 1 – Image tirée de <https://galileospendulum.org/2011/03/28/the-problem-of-string-theory/>

1 Introduction et historique

Durant le dernier siècle, les avancées en physique théorique ont été très importantes, notamment avec l'avènement de la théorie de la mécanique quantique. Le passage de la mécanique classique, fortement dominée par la mécanique newtonienne, à la mécanique quantique a permis d'expliquer de nombreux phénomènes mal compris à cette époque. L'un des grands succès de ces théories a été de sonder les phénomènes à l'échelle atomique, puis nucléaire ; la découverte du proton, du neutron, de l'électron, etc. a permis par la suite l'établissement du modèle standard, aujourd'hui accepté comme étant le modèle le plus réaliste et complet pouvant expliquer les particules et leurs interactions. Cependant, un problème majeur subsiste dans le modèle standard ; il n'y a toujours pas de manière précise et claire d'expliquer les effets de la gravité grâce à une théorie basée sur la mécanique quantique.

Par le passé, les travaux de James Clerk Maxwell ont permis de déterminer qu'en fait, l'électricité et le magnétisme ne sont qu'en fait deux facettes du même phénomène ; les interactions électromagnétiques [4]. Plus tard, les interactions nucléaires fortes et faibles ont été découvertes. Ces deux nouvelles interactions semblaient, à première vue, des phénomènes séparés, tout comme l'était l'électricité et le magnétisme auparavant ; cependant, il a depuis été proposé (et vérifié) par Glashow, Weinberg et Salam [4] qu'en fait, les théories d'interactions faibles et d'électromagnétisme peuvent également être unifiées en un seul phénomène, soit la théorie électrofaible. Les interactions fortes, quant à elles, répondent de la chromodynamique quantique (QCD) [4]. Mais qu'en est-il de la gravité ?

Des efforts considérables ont été déployés pour unifier le phénomène de gravité avec le reste des interactions déjà connues, afin d'en faire une "théorie du tout". Celle qui semblait la plus prometteuse à l'époque était la théorie des cordes. La promesse de cette théorie était d'expliquer que toute interaction et toute particule découlait de minuscules 'cordes', qui étaient en fait proposées comme étant LA particule fondamentale, et de ses différents modes de vibration, et du fait que la corde était soit ouverte ou fermée. L'analogie est la suivante : de la même manière qu'une corde de violon peut produire différents sons correspondant à différentes fréquences dépendamment du mode de vibration de la corde du violon, la corde de la théorie du même nom pouvait donner lieu à toute particule et interaction prédite par le modèle standard simplement en vibrant à des modes différents. En d'autres mots, selon cette théorie, l'univers entier n'est composé que de minuscules cordes qui vibrent.

La théorie des cordes se voulait donc une alternative au modèle standard pour unifier toute interaction et toute particule en une seule loi élégante, avec laquelle l'univers entier pouvait être décrit. À l'époque, le modèle standard décrivait déjà très bien tout ce qui est observé dans l'univers, à deux détails près. Premièrement, le modèle standard n'arrivait pas à fournir aucune explication en ce qui a trait à la gravité, et deuxièmement, un certain nombre de paramètres ne pouvaient être arbitrairement calculés, comme par exemple le ratio de la masse d'un muon avec la masse d'un électron [6]. La théorie des cordes, elle, promettait au moins de remédier à la problématique de la gravité. D'autres théories avaient été proposées pour expliquer la gravité, telle que la gravité quantique, la supergravité, la super-symétrie et la théorie de grande unification [4]. Bien que la super-symétrie ait connu certains succès pour unifier les bosons et les fermions, ce qui poussait plus loin l'effort d'unification, il n'y avait toutefois toujours pas de preuves expérimentales qu'elle fonctionnait bel et bien.

La théorie des cordes n'est toujours pas prouvée non plus, mais l'effort pour en faire une théorie du

tout est colossal, surtout depuis les années 70 environ. Les débuts de la théorie des cordes proposait une nouvelle approche pour décrire les interactions fortes, mais en parallèle, la chromodynamique quantique était développée et semblait proposer des résultats beaucoup plus proches des résultats expérimentaux que ce que la théorie des cordes pouvait prédire, ce qui a poussé la communauté scientifique à perdre l'intérêt de cette théorie, du moins en tant que théorie expliquant les interactions fortes. Cependant, certains résultats obtenus jusque là allait apporter un argument convaincant, bien que non définitif, sur l'existence de la particule d'échange d'interactions gravitationnelles, soit le graviton, comme étant émergente des vibrations de cordes fermées [1].

Différentes versions de cette théorie ont été alors proposées, entrant principalement dans deux ensembles de théories; celles où seulement des cordes fermées pouvaient exister, et celles où les cordes peuvent être soit ouvertes ou fermées. Une théorie des cordes seulement ouvertes n'avait pas vraiment de sens puisque les cordes pouvaient simplement se refermer d'elles-mêmes, et donc cette idée fut écartée. De là, deux autres ensembles de versions de la théorie des cordes firent leur apparition; les cordes bosoniques, qui prédisent l'existence de pas moins de 26 dimensions, et les supercordes, prédisant 10 dimensions. Ce nombre de dimensions est en fait le nombre minimal de dimensions pour que les mathématiques de la théorie restent cohérentes, et c'est donc le nombre le plus simplifié de dimensions qu'il était possible d'avoir à ce moment dans la théorie. Les supercordes s'inspirent de la super-symétrie, dans ce sens où l'unification des bosons et des fermions est également présente, contrairement aux cordes bosoniques qui ne prédisent que des bosons, comme son nom l'indique. Le nombre de dimensions sera discuté plus loin dans cette présentation. Ces différentes versions de la théorie des cordes visaient d'abord à expliquer les bosons, mais comme l'univers n'est pas entièrement formé de bosons, la théorie se devait de prédire les fermions également, d'où les supercordes; le problème restant était au niveau des tachyons, qui créaient une certaine instabilité. La première théorie réellement consistante des supercordes a donc été développée en 1977 par Ferdinando Gliozzi, Joel Scherk et David I. Olive, et porte le nom de projection GSO en leur honneur.

En 1984, une certaine révolution a commencé dans ce domaine de recherche, ce que la littérature scientifique qualifie de la première révolution des supercordes. À ce moment, il a été compris que les théories des supercordes pouvaient formuler toute interaction et toute particule du modèle standard d'une manière alternative à ce dernier. Cinq versions différentes prédominent toutes les autres, et des similitudes les relient les unes aux autres; elles resteront toutefois distinctes jusqu'à la deuxième révolution des supercordes, en environ 1994 (nous y reviendrons sous peu). La première révolution a commencé plus précisément en réalisant que six des dix dimensions prédites par les supercordes pouvaient en fait "s'enrouler" les unes sur les autres à très petite échelle, les rendant indétectables à l'échelle humaine; les quatre dimensions restantes (trois d'espace, une de temps) suffisaient à décrire l'univers. De plus, ces quatre dimensions concordaient avec la super-symétrie, ce qui constituait un succès de cette théorie. La compactification des six autres dimensions, quant à elles, résultaient d'une généralisation de la théorie de Kaluza-Klein, découverte dans les années 20 en lien avec la récente découverte de la relativité générale par Einstein [2]. L'échelle à laquelle l'enroulement se fait est supposé comparable à l'échelle de la longueur de Planck, ce qui expliquerait pourquoi elle reste indétectable à ce jour.

Les années 90 ont été marquées par la seconde révolution des supercordes, probablement le plus grand succès que la théorie ait connu depuis sa proposition quelques décennies auparavant. Le lien entre les cinq principales théories des supercordes trouvées 10 ans auparavant est précisé; les cinq théories seraient en fait cinq cas limites différents d'une autre, plus grande théorie les englobant toutes. Il était pensé

qu'au minimum 10 dimensions étaient nécessaires pour expliquer les supercordes, et qu'un nombre plus grand de dimensions ne faisait que compliquer inutilement le problème ; or, cette théorie unificatrice des supercordes nécessitait 11 dimensions. Cette théorie, appelée très originalement 'théorie M', présentait plusieurs équivalences nécessaires à cette liaison ; ce sont les dualités S, T et U, la symétrie miroir et la 'conifold' [1], qui se trouve à être une généralisation des variétés différentielles.

Joseph Polchinski découvre par la suite qu'un objet de plus grande dimension est optionnel pour expliquer la théorie M, mais qu'elle est nécessaire pour que certains phénomènes cosmologiques puissent découler de la théorie M. Cet objet se nomme, en anglais, "D-branes" ; c'est un hyperplan pouvant fixer certaines cordes sur une extrémité, pourvu qu'elle satisfasse la condition frontière de Dirichlet. Quelques années plus tard, au tour de Juan Maldacena d'ajouter une nouvelle corde à l'arc de cette théorie, pour ainsi dire. Il pose qu'une relation existe entre la théorie des cordes et une théorie de Yang-Mills supersymétrique à $N = 4$, soit une théorie de jauge. Cette proposition prédit certaines propriétés cosmologiques des trous noirs également prédites par Stephen Hawking.

Depuis cette seconde révolution, le progrès de la théorie des cordes est très limité, tandis que les théories dites alternatives (celles discutées plus tôt dans cette présentation, à savoir le modèle standard et la gravité quantique, par exemple) semblent plus prometteuses pour l'avenir de l'unification des lois de la physique. La recherche est toujours très active dans ce domaine, bien qu'elle n'ait pas fait d'avancées majeures, ou du moins comparables aux avancées des deux premières révolutions, depuis environ 25 ans.

2 Dimensions supplémentaires

Sur ce, commençons plus en détails l'explication de la théorie des cordes. L'un des premiers résultats qui devrait sauter aux yeux d'un élève voulant se familiariser avec cette théorie est l'existence de nombreuses dimensions d'ordre supérieures à celles qu'il est possible d'observer à notre échelle. Cependant, même si ces dimensions n'ont toujours pas été détectées à ce jour, elles ne sont pas impossibles pour autant, comme le démontrera le développement qui suit [6].

Techniquement parlant, dans plusieurs sphères mathématiques et quelques-unes physiques, ajouter des dimensions spatiales n'est que triviale mathématique complexifiant le problème. On peut effectivement vérifier que l'ajout de dimensions en relativité restreinte (pour ne citer qu'un exemple parmi tant d'autres) n'en change pas les lois, pourvu que ce soit des dimensions spatiales ; les transformations de Lorentz, entre autres, demeureront les mêmes, tout comme les conservations de quantité de mouvement. Cependant, si on l'applique à un problème comme le puits de potentiel, un résultat intéressant surgit.

Supposons un puits de potentiel de largeur a en une dimension, disons x . On sait, de par les cours de physique quantique déjà vus jusqu'à maintenant, que l'équation de Schrödinger donnera

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = E\psi$$

dont les solutions seront

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{k\pi x}{a}$$

où $k=1,2,\dots$ sont les niveaux d'énergie. Cette énergie se quantifie avec la relation

$$E_k = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{k\pi}{a} \right)^2$$

Il est évidemment possible d'ajouter les dimensions usuelles en y et en z pour obtenir l'équation de Schrödinger en 3D. D'à partir du puits de potentiel en une dimension, et faisant abstraction des dimensions y et z usuelles, supposons l'ajout d'une autre dimension supplémentaire, définie par la lettre u . Cette dimension est supposée enroulée à l'intérieur d'une géométrie circulaire de petite taille, de rayon R et périodique, telle que $(x, u) \rightarrow (x, u+2\pi R)$. Ceci force le puits de potentiel à prendre une forme cylindrique de longueur a et de diamètre $2\pi R$ dont le potentiel est confiné à la région entre 0 et a . En posant R très petit, tel que $R \ll a$, et en ne regardant que les états de basse énergie, l'hamiltonien du système reste très similaire au cas précédent où seule la dimension x était considérée, et l'équation de Schrödinger devient

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} \right) = E\psi$$

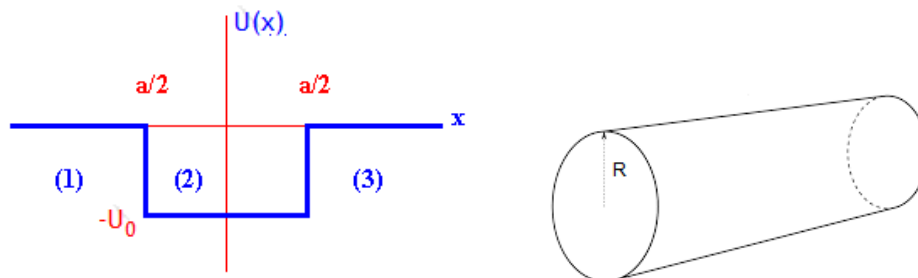


Figure 2 – Un puits de potentiel standard. La démonstration présentée ici supposera qu'on remplace le fond du puits de potentiel en 1D par un cylindre de rayon R , fermé et périodique, représentant la dimension u .

Jusque là, tout reste semblable au traitement de l'équation de Schrödinger qu'on connaît tous très bien. La technique de séparation de variables est utilisée pour obtenir une solution de la forme $\Psi_{k,l}(x, u) = \psi_k(x)\psi_l(u)$ telle que

$$\psi_k(x) = c_k \sin \frac{k\pi x}{a}$$

$$\psi_l(u) = a_l \sin \frac{lu}{R} + b_l \cos \frac{lu}{R}$$

avec une condition de périodicité sur ψ_l telle que $\psi_l(u) = \psi_l(u + 2\pi R)$. L'élément intéressant ici est le cosinus présent dans la deuxième fonction d'onde ; ceci permet un niveau d'énergie fondamental $l=0$, ce qui ne serait pas possible avec $k=0$. Ceci donne $\psi_0(u) = b_0$. L'énergie du système est donc

$$E_{k,l} = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\frac{k\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{l}{R} \right)^2 \right]$$

Cette solution montre que le niveau d'énergie correspondant à $l = 0$ est bel et bien possible, même si le niveau d'énergie $k = 0$ soit toujours interdit par la physique quantique ; tant et aussi longtemps que $R \ll a$, les niveaux de basse énergie seront essentiellement inchangés, bien que ceux de haute énergie soient changés. Ceci pose donc le cas particulier où $E_{k,0} = E_k$, ou autrement dit, que le cas où $l = 0$ correspond en fait aux mêmes niveaux d'énergie qu'avec le cas où on ne considère que la dimension x . Le 'nouvel' état fondamental est donc obtenu lorsque $k, l = 1$ (puisque $k = 0$ est toujours interdit, et que $l = 0$ nous redonne le cas à une dimension) où le deuxième terme entre crochets est dominant. L'énergie sera donc

$$E_{1,1} \approx \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{R} \right)^2$$

ce qui est comparable au cas où seule la dimension x était considérée, dans laquelle

$$E_k = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{k\pi}{a} \right)^2$$

Il est donc possible de comparer les termes entre parenthèses des deux énergies, ce qui donne

$$\frac{k\pi}{a} \approx \frac{1}{R} \rightarrow k \approx \frac{a}{\pi R}$$

On voit ici que puisque R est beaucoup plus petit que a , la valeur de k doit être très grande. Ceci indique donc qu'un niveau d'énergie colossal doit être utilisé pour seulement sonder l'état fondamental lorsqu'on ajoute cette dimension u . Ceci dit, tant que la dimension est très petite, disons de l'ordre de la longueur de Planck, l'énergie doit être très, très grande pour pouvoir observer les effets de cette nouvelle dimension, ce qui offre du coup un argument expliquant pourquoi il est impossible d'observer ces dimensions

supplémentaires. En ce sens, il serait possible d'ajouter encore d'autres dimensions, utiliser le même raisonnement encore et encore pour obtenir autant de dimensions à toutes fins pratiques indétectables avec les moyens actuels, et que le tout reste cohérent avec la théorie déjà connue.

3 Théorie de Kaluza-Klein

Maintenant qu'on sait qu'on peut obtenir un nombre de dimensions arbitraire qui ne semblent pas contredire les lois de la mécanique quantique, il est important de savoir comment on peut, en fait, avoir autant de si petites dimensions. La réponse se trouve dans la compactification de ces dimensions supplémentaires, et cette compactification elle-même repose sur une généralisation de la théorie de Kaluza-Klein.

Nommée en l'honneur de ses deux précurseurs, soit Theodor Kaluza et Oskar Klein [2], cette théorie se voulait être une extension permettant d'ajouter des dimensions supplémentaires (commençant avec une 4^e dimension d'espace, pour un total de 5 dimensions) à la théorie de la relativité générale d'Einstein. De plus, cette théorie avait pour but d'unifier les interactions électromagnétiques et gravitationnelles en faisant usage de cette cinquième dimension. Essentiellement parlant, Kaluza apporta la généralisation de la théorie d'Einstein à une dimension supplémentaire, en précisant que la dimension supplémentaire ne devait pas avoir de composantes dépendant de sa propre dimension, ce qui est surnommé la condition du cylindre. Cette condition a d'ailleurs été utilisée dans la preuve de la section précédente. Klein, pour sa part, introduisit une interprétation quantique de cette théorie pour pouvoir concorder avec les découvertes récentes de Heisenberg et de Schrödinger, entre autres. Son hypothèse expliquait la condition du cylindre proposée par Kaluza, et proposait également que cette dimension supplémentaire soit enroulée sur elle-même autour d'un rayon très petit, soit environ l'ordre de la longueur de Planck.

En résumé, l'hypothèse de Kaluza reposait sur une description à cinq dimensions de la théorie de la relativité générale d'Einstein, sans faire usage d'aucun paramètre libre, un avantage théorique considérable en ce qui a trait à la prédictibilité de phénomènes physiques. Une métrique à 5 dimensions était définie à l'aide de caractères latins, soit g_{AB} dont les caractères représentaient les cinq dimensions. La métrique usuelle à quatre dimensions, elle représentée par des caractères grecs, soit $g_{\mu\nu}$ et représentant 3 dimensions d'espace et une de temps, revient dans la définition. De plus, un quadrivecteur représentant le potentiel vectoriel électromagnétique, soit V^μ , ainsi qu'un champ scalaire, ϕ , sont inclus. Donc, la métrique et la métrique inverse de cette cinquième dimension sont données par

$$g_{AB} = \begin{bmatrix} g_{\mu\nu} + \phi^2 V_\mu V_\nu & \phi^2 V_\mu \\ \phi^2 V_\nu & \phi^2 \end{bmatrix}$$

$$g^{AB} = \begin{bmatrix} g^{\mu\nu} & -V^\mu \\ -V^\nu & g_{AB} V^A V^B + \frac{1}{\phi^2} \end{bmatrix}$$

Ces deux définitions introduisent une longueur infinitésimale invariante correspondant à la cinquième

dimension, soit

$$ds^2 = g_{AB}dx^A dx^B = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + \phi^2(V_\nu dx^\nu + dx^4)^2$$

La condition du cylindre peut alors être écrite comme suit :

$$\frac{\partial g_{AB}}{\partial x^4} = 0$$

Les équations de champ en 5D suivent ensuite des calculs des tenseurs de Ricci en 5D, obtenus des connections en 5D, qui elles sont obtenues de la métrique 5D définie plus haut.

La suite de cette théorie est plutôt fastidieuse pour ce qui est des exigences du présent projet et pourrait à lui seul compléter le travail demandé, donc il sera résumé brièvement de manière conceptuelle. Une démonstration plus approfondie se trouve sur le site internet mentionné en référence [2]. Essentiellement, les équations de champ sont obtenues des tenseurs de Ricci en 5 dimensions. Les équations correspondant à V^ν ont la particularité de retomber sur les équations de Maxwell électromagnétiques dans le vide, si on suppose le champ scalaire constant, ce qui demande une constante de conversion telle que $V^\nu \rightarrow kV^\nu$. Le résultat de cette conversion fait en sorte que la constante universelle gravitationnelle, G , peut être comprise comme une constante de couplage électromagnétique dans la métrique. Néanmoins, tout cela demeure une extension classique à la relativité générale en 5 dimensions.

Puis, arrive l'interprétation de Klein. En utilisant les résultats de de Broglie (obtenus environ à la même époque), Klein suggère que la cinquième dimension soit fermée et périodique, et dont le mouvement des charges électriques puissent être interprétées comme des ondes stationnaires de longueur d'onde λ^5 . Plus précisément, il trouve la relation

$$\lambda^5 \approx \frac{hG^{1/2}}{cq}$$

où h est la constante de Planck, G est la constante gravitationnelle universelle, c est la vitesse de la lumière et q est la charge électrique en question. Klein obtiendra donc que $\lambda^5 \approx 10^{-30}cm$ [2] ce qui concorde avec l'hypothèse d'une dimension très petite enroulée sur elle-même, telle qu'énoncée dans la section précédente ; cette longueur est effectivement proche de la longueur de Planck.

L'interprétation en termes de théorie des groupes de la théorie de Kaluza-Klein dicte que la dimension supplémentaire fait partie d'un ensemble compact, d'où le terme de compactification ; elle correspond en fait au groupe $U(1)$. De là, la théorie de Kaluza-Klein suggère que la théorie de jauge est en fait une théorie de la symétrie circulaire de ces dimensions additionnelles. Par la suite, généraliser $U(1)$ en le remplaçant par un groupe de Lie donne les théories de Yang-Mills[3] ; cette théorie est simplement une théorie de jauge basée sur le groupe $SU(N)$ ayant entre autres connu des succès dans l'unification des interactions

électrofaibles, dans la chromodynamique quantique et également dans la théorie des supercordes. Il est cependant important de noter que bien que la théorie de Kaluza-Klein ait été étendue par la suite à 6 dimensions, et qu'elle puisse porter des similitudes importantes avec la théorie de Yang-Mills, les deux ne sont pas équivalentes; Yang-Mills est utilisé dans le cas d'espace-temps plats, tandis que Kaluza-Klein est utilisé dans le cas d'espace-temps courbes. Les variétés différentielles de Calabi-Yau peuvent être mentionnées ici, pour le cas où non seulement l'espace temps est courbe, mais dont les dimensions peuvent être entremêlées entre elles; c'est cependant une représentation plus facile à concevoir lorsqu'il est question de beaucoup de très petites dimensions supplémentaires.

Du reste, la théorie de Kaluza-Klein pouvait servir d'unification entre la gravitation, la relativité générale et les interactions électromagnétiques; plus tard, comme l'électromagnétisme était couplé avec les interactions faibles (théorie électrofaible), l'unification de la gravité semblait se faire d'elle-même; ça semblait être le cas encore plus avec l'avènement de la chromodynamique quantique. Ceci devait se faire avec l'utilisation de groupes symétriques, soit $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. De nombreux problèmes sont survenus à cette époque, surtout concernant l'inclusion des fermions dans cette théorie, alors que la super-symétrie n'avait pas encore été développée. La théorie de Kaluza-Klein n'aura donc été qu'une belle tentative d'unifier la gravité au reste des interactions via l'ajout d'une cinquième dimension. Plus tard, Pauli aurait proposé une théorie semblable accommodant six dimensions, mais ne l'aurait jamais publiée; il en aurait toutefois parlé quelques fois en conférence. Cependant, la théorie de Kaluza-Klein en tant que tel a été reprise pour expliquer certains phénomènes dans la théorie des cordes, d'où son intérêt, surtout en conjonction avec la théorie de Yang-Mills et les variétés de Calabi-Yau.

4 D-Branes

Jusqu'à maintenant, la théorie de Kaluza-Klein a tenté de montrer, sans succès, que la gravité pouvait être unifiée aux interactions électromagnétiques via l'ajout d'une cinquième dimension fermée, périodique et ne dépendant pas d'elle-même. Il a également été possible de généraliser la théorie de la relativité générale en cinq, puis en six dimensions, pourvu que ces dimensions soient toutes de nature spatiales, fermées, périodiques et enroulées autour d'un très petit rayon. Finalement, il a été montré que pour les niveaux fondamentaux d'énergie accommodant une quatrième dimension d'espace, il fallait, une fois de plus, que cette dimension soit suffisamment petite (de l'ordre de la longueur de Planck), repliée sur elle-même, fermée et périodique, auquel cas elle demeure indétectable par nos moyens technologiques actuels, mais tout de même possible. L'idée de généraliser le tout à N dimensions semble donc possible, voire même nécessaire pour obtenir le nombre de dimensions prescrites par la théorie des cordes; 26 dimensions pour les théories des cordes bosoniques, 10 pour les différentes variantes des théories des supercordes, et 11 pour la théorie M.

L'existence de dimensions d'ordre supérieures donne lieu à un objet physique d'importance cruciale pour bien comprendre la théorie des cordes dans son ensemble. Il s'agit ici des D-Branes. Une D-Brane peut être définie pour un nombre varié de dimensions; on les qualifiera alors de D0-Brane, D1-Brane, ... , Dp-Brane, où p représente le nombre de dimensions spatiales de l'objet en question. La vulgarisation la plus simple d'une D-Brane est la suivante: c'est un objet fixant l'une (ou les deux) extrémités d'une corde ouverte, limitant son mouvement. La D-Brane peut se déplacer dans un espace à N dimensions, emportant avec elle les cordes lui étant attachées. Sans nécessairement être limitée à cette définition, une

D-Brane peut être vu comme une sorte d'hyperplan, d'hyperespace, etc. La démarche qui suit visera à définir le concept d'une D-Brane [6].

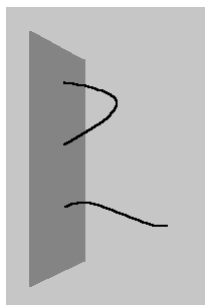


Figure 3 – Conceptualisation d'une D-Brane avec une corde attachée à un seul bout, et une autre attachée aux deux bouts.

Au-delà de cette vulgarisation, les D-Branes peuvent être obtenues en faisant un peu de mécanique analytique. On a vu auparavant, dans le cours du même nom, le concept d'action, soit

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

où L est le lagrangien du système. Un autre concept à retenir ici, est le fait qu'en relativité restreinte, un événement donné peut être représenté par un point sur un diagramme de Minkowski ; la 'ligne d'univers' représentant cet événement (ce point) spécifique est simplement le déplacement, dans le temps, de cet événement. Qu'en est-il si un événement est représenté par une ligne, un plan, un espace ? En prenant l'exemple d'une ligne, le déplacement dans l'espace de Minkowski donnera une sorte de "feuille d'univers" se déplaçant dans le temps, alors qu'un plan donnerait un "espace d'univers", et ainsi de suite. Ceci dit, en relativité restreinte, seuls les points étaient étudiés ; si ces points (par exemple, une particule ponctuelle) sont remplacés par des lignes, disons des cordes, alors deux possibilités apparaissent ; la première, dans le cas d'une corde ouverte, donnera des feuilles d'univers, tandis que la deuxième, le cas où les cordes sont fermées, donnera des espaces d'univers, généralement en forme de tubes.

L'action calculée sur ces cordes se trouve finalement à être l'aire de la surface des feuilles d'univers ; cette action porte le nom d'action de Nambu-Goto. Elle se doit d'être invariante à la reparamétrisation, ce qui se prouve bien en se servant du fait que la métrique apparaît lorsqu'on introduit une aire infinitésimale pour calculer l'intégrale présente dans l'action. Cette métrique, comme en relativité restreinte, doit être invariante selon les transformations de Lorentz. Donc, une corde évoluant dans l'espace-temps traditionnel crée un feuillet d'univers, qui peut être décrit par $X^\mu(\tau, \sigma)$, où τ et σ sont des paramètres de temps et d'espace, respectivement ; ce sont donc un système de coordonnées pour les feuilles d'univers. Mieux ; le paramètre σ se veut constant pour les extrémités des cordes (autrement dit, la ligne d'univers correspondant au point d'extrémité d'une corde donne un paramètre spatial constant) donc seul τ varie, et donc la paramétrisation se fait à l'aide de τ . Il en résulte que

$$\frac{\partial X^0}{\partial \tau} \neq 0$$

où la notation a été abrégée ($X^0 = X^0(\tau, \sigma)$) pour des raisons de simplicité, et où la condition précédente est nécessaire au minimum aux extrémités des cordes. Ceci peut, par contre, être également supposé pour toute valeur de σ , qui peut d'ailleurs être paramétrisé pour obtenir les feuillet d'univers des cordes. On peut ensuite caractériser le quadrilatère représentant le feuillet d'univers à l'aide de vecteurs infinitésimaux, dont le nombre sera égal au nombre de dimensions de l'objet (ici, deux), soit :

$$\begin{aligned} dv_1^\mu &= \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} d\tau \\ dv_2^\mu &= \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} d\sigma \end{aligned}$$

De là, on peut obtenir l'aire du feuillet d'univers :

$$A = \int d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2}$$

En simplifiant la notation comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{X}^\mu &\equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \equiv \dot{X} \\ X^{\mu'} &\equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \equiv X' \end{aligned}$$

on peut trouver l'action de la corde, soit

$$S = \frac{-T_0}{c} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}$$

où le facteur $-T_0/c$ permet simplement de conserver les unités de manière cohérente de part et d'autre de l'égalité. Cette action n'est pas nécessairement invariante, et en introduisant la métrique appropriée, soit

$$\gamma_{\tau\sigma} = \begin{bmatrix} (\dot{X})^2 & \dot{X} \cdot X' \\ \dot{X} \cdot X' & (X')^2 \end{bmatrix}$$

on en vient à trouver l'action de Nambu-Goto, invariante sous la reparamétrisation

$$S = \frac{-T_0}{c} \int d\tau d\sigma \sqrt{\gamma}$$

où $\gamma \equiv \det(\gamma_{\tau,\sigma})$.

Il est ensuite possible d'y inclure des conditions limites, comme par exemple les conditions frontières de Neumann et de Dirichlet. Tout d'abord, la condition frontière de Dirichlet donnera, dans ce cas

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}(\tau, \sigma_*) = 0$$

pour $\mu \neq 0$, puisque la variation du temps est représenté par la variation de τ . On aura également, pour le cas d'une condition frontière d'une corde libre

$$P_\mu^\sigma(\tau, \sigma_*) = 0$$

où P représente la dérivée partielle du lagrangien de la corde par rapport à X^μ . Comme l'extrémité est libre, cette fois μ n'est pas contraint, et on peut avoir

$$P_0^\sigma(\tau, \sigma_1) = P_0^\sigma(\tau, 0) = 0$$

L'objet permettant de fixer l'extrémité d'une corde est défini par sa dimension. C'est cet objet qu'on appelle le D-Brane, où le D de cette appellation fait référence à la condition frontière de Dirichlet.

Maintenant, ces D-Branes peuvent être des structures dont le nombre de dimensions peut rester arbitraire ; on parle alors de Dp-Branes pour les branes à p dimensions. La plupart des différentes versions des théories des cordes font mention de cordes bosoniques ; dans ces cas, pas moins de 26 dimensions sont nécessaires pour décrire la théorie en entier. On est loin des 5 dimensions proposées par Kaluza-Klein ! Ces 26 dimensions sont, bien évidemment, 25 dimensions d'espace et une seule de temps, ce qui reste cohérent avec la preuve montrée au début de ce document, ainsi qu'avec la relativité restreinte et les transformations de Lorentz (tant et aussi longtemps qu'on ajoute des dimensions spatiales, la relativité restreinte reste cohérente ; si on ajoute une ou des dimensions de temps, plus rien ne fonctionne tel quel).

Ceci dit, une mention est importante ici des différentes théories des supercordes, qui incorporent la supersymétrie ; les bosons et les fermions sont donc tous inclus dans une théorie de super-symétrie, ce qui n'était pas nécessairement le cas avec la symétrie standard. Dans le cas des supercordes, ceci permet de diminuer le nombre de dimensions à 10 (9 d'espace, une de temps) ce qui est déjà beaucoup moins complexe. La

théorie M, quant à elle, englobe les différentes versions des théories des supercordes et est une théorie évoluant dans 11 dimensions (10 d'espace, une de temps). Ceci dit, il est important, pour la suite de la lecture, de comprendre que l'argument de la théorie sera précisé à 26 dimensions, mais qu'il s'applique également pour les cas à 10 dimensions des supercordes et à 11 dimensions de la théorie M, et donc seront sous-entendus.

Ce rappel est important pour visualiser (du moins, mathématiquement parlant, puisqu'il est, à toutes fins pratiques, impossible de s'imaginer autant de dimensions pour nous simples mortels vivant dans un espace à 4 dimensions d'espace-temps) les structures que sont les D-Branes. Comme elles peuvent être généralisées à p dimensions, ici, elles ont la possibilité de 'remplir' les dimensions d'espace, et d'évoluer dans un nombre de dimensions (spatiales) égale au nombre de dimensions dans lequel la théorie évolue. En d'autres mots, les théories des cordes usuelles peuvent avoir des D25-Branes, les théories des supercordes peuvent accommoder des D9-Branes, et la théorie M peut accommoder des D10-Branes. Lorsque les D-Branes prennent le nombre maximal de dimensions qu'il leur est possible, il sera question de D-Branes dites de remplissage, puisqu'elles remplissent effectivement toutes les dimensions; elles auront une signification physique discutée plus loin. Bien évidemment, cela n'empêche pas les D-Branes d'occuper moins de dimensions que le maximum possible. Un autre point à noter : en général, la mention d'une D-Brane ne mentionne pas de nombre de dimensions; il sera donc sous-entendu que si ce nombre n'est pas mentionné, alors il est question de D p -Branes en général.

De ce fait, les objets mentionnés plus tôt, soit \dot{X}^μ et $X^{\mu'}$ comportant la paramétrisation selon τ et σ , étaient des objets généralisés à notre espace-temps à 4 dimensions afin de trouver l'action de Nambu-Goto, et donc on avait que $\mu = 0, 1, 2, 3$. S'il est possible d'évoluer en 26 dimensions, alors $\mu \in \{0, 25\}$ et on peut ainsi paramétriser X selon les 26 dimensions. Dans tous les cas, les conditions de Neumann et de Dirichlet peuvent s'appliquer sur les points fixes des cordes. Il est également utile de mentionner une certaine notation de coordonnées; comme $\mu = p$ ici, on peut identifier p coordonnées tangentielles à une D p -Brane donnée, ainsi que p autres coordonnées normales à cette même D p -Brane. Ces coordonnées pourront être notées comme étant X^0, X^1, \dots, X^p pour les p coordonnées tangentielles à la D p -Brane, et $X^{p+1}, X^{p+2}, \dots, X^d$ pour les p coordonnées normales à la D p -Brane.

L'étape suivante, c'est la quantisation des cordes en présence des D-Branes. C'est un processus relativement fastidieux pouvant être trouvé aux chapitres 12 et 14 du livre de Barton Zwiebach sur la théorie des cordes [6] duquel certaines conclusions intéressantes peuvent être tirées. Entre autres, l'hypervolume d'univers dans lequel les D-Branes évoluent peuvent mathématiquement donner des équations de champ, qui eux, évoluent à même la D-Brane associée. Ces champs peuvent être scalaires ou vectoriels, et donneront lieu à des états particuliers correspondant à certaines particules et interactions. Par exemple, l'état fondamental d'une D p -Brane donne lieu à des champs tachyoniques, ayant une masse identique à celle des états tachyoniques sur les D25-Branes. Le champ associé est en fait un scalaire de Lorentz sur la D-Brane correspondante. De plus, si un oscillateur agit sur l'état fondamental, dépendamment du sens de l'oscillation, différents phénomènes émergent; un oscillateur agissant sur une coordonnée tangente à la D-Brane donne des états sans masse de dimension $(p+1)-2$, ce qui indique que ce sont des états photoniques. Les champs associés sont en fait des champs de jauge de Maxwell; l'électromagnétisme émerge donc. Pour le cas d'un oscillateur agissant sur une coordonnée normale à la D-Brane, il y aura plutôt $(d-p)$ états sur la D-Brane, ce qui donnera des scalaires de Lorentz sans masse pour chacune des directions normales à la D-Brane. La signification physique de ce scalaire indique simplement le nombre de directions indépendantes dans laquelle la D-Brane peut se déplacer dans l'espace à p dimensions; la

D25-Brane remplissant toutes les dimensions d'espace, elle ne pourra cependant pas se déplacer. Il en va de même pour la D9-Brane des supercordes et la D10-Brane de la théorie M.

Lorsqu'on ajoute des cordes ouvertes dont l'une des extrémités est fixée à une D-Brane donnée, et l'autre extrémité fixée à une seconde D-Brane, d'autres phénomènes surgissent. Pour les expliquer, on doit revenir à des théories de champs de jauge interagissant les uns avec les autres, donnant lieu aux théories de Yang-Mills mentionnées précédemment ; l'hypervolume d'univers formé de deux D-Branes coïncidentes donnera lieu à une théorie de Yang-Mills $U(2)$. De manière plus générale, N D-Branes coïncidentes donneront lieu à N^2 champs de jauge sans masse interagissant les uns avec les autres, définissant une théorie de Yang-Mills $U(N)$ sur l'hypervolume d'univers formé de ces N D-Branes. Ces théories de Yang-Mills sont d'ailleurs des groupes, comme la notation le suggère, desquelles les notions de symétrie de jauge peuvent s'appliquer. Par ailleurs, le groupe $U(1)$ de Yang-Mills retombe tout simplement sur la théorie de Maxwell. Pour $U(2)$, on retrouve la théorie électrofaible, bien qu'il faille modifier légèrement l'approche au niveau des D-Branes pour bien expliquer ce cas particulier. En effet, le groupe $U(2)$ vu tel quel par la théorie des cordes stipule que deux des quatre champs de jauge résultants seront sans masse, alors que la théorie électrofaible vue en dehors de la théorie des cordes prédit plutôt un seul champ de jauge sans masse.

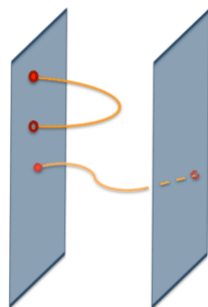


Figure 4 – Deux D-Branes parallèles, avec une corde dont les deux bouts sont fixés aux deux D-Branes simultanément.

Finalement, si l'on désire aller plus loin, on peut également reconfigurer les positions des D-Branes dans l'espace-temps de dimensions appropriées pour donner lieu à encore d'autres phénomènes. Par exemple, il est théoriquement possible de reconstruire un modèle semi-réaliste de la physique des particules presque entière à l'aide d'une configuration permettant les D-Branes intersectées, particulièrement dans le cas des théories des supercordes, évoluant en 10 dimensions d'espace-temps ; six des neuf dimensions d'espace seront donc enroulées sur un très petit volume où les D-Branes de dimensions correspondantes seront libres de se croiser les unes les autres. La théorie de Yang-Mills associée devra être en 4 dimensions (trois d'espace, une de temps) et donnera donc lieu au groupe $U(4)$. Les développements qui suivront seront en fait le développement des théories des supercordes, dans lesquelles la symétrie ne suffit plus ; il faudra plutôt faire usage de super-symétries.

5 Conclusion

En résumé, plusieurs notions de cours du baccalauréat auront apporté leur contribution, à leur manière, à une ouverture vers la théorie des cordes. En effet, les notions de relativité restreinte peuvent être généralisées à N dimensions sans problèmes, tout en respectant les transformations de Lorentz ; la seule condition étant que les dimensions supplémentaires se doivent d'être des dimensions d'espace, et non de temps. Une première dimension a été suggérée par Kaluza afin de pousser cette généralisation à la relativité générale d'Einstein. Cette dimension supplémentaire se devait d'être fermée, périodique et enroulée autour d'un rayon très petit. Du développement de cette dimension supplémentaire surgissait la théorie de Maxwell ; c'était un premier essai (bien qu'infructueux) à unir la gravitation aux interactions électromagnétiques. Pauli, par la suite, rajouta une dimension supplémentaire pour atteindre 6 dimensions ; cinq d'espace et une de temps. Klein a également apporté sa contribution en y donnant sa propre interprétation, le tout conforme avec la mécanique quantique, à l'époque en plein essor.

Cette dimension supplémentaire a été testée à l'aide d'une démonstration montrant qu'elle puisse exister selon certaines conditions. Ces conditions sont, une fois de plus, que cette dimension doit être fermée, périodique et enroulée autour d'un rayon très petit, dont Klein avait d'ailleurs montré qu'elle puisse être de l'ordre de la longueur de Planck. Cependant, si la présence d'une telle dimension supérieure si petite porte à douter, la possibilité qu'elle soit réellement présente est non-nulle ; l'énergie nécessaire pour sonder à cette longueur est tellement immense qu'elle ne peut pas actuellement être technologiquement atteignable, et donc cette dimension échappe à la détection. De plus, les niveaux d'énergies impliqués dans un puits de potentiel quantique portant cette dimension supplémentaire indique que les niveaux de basses énergies demeurent essentiellement inchangés, ce qui reste compatible avec les notions de mécanique quantique actuelles.

L'ajout de plusieurs de ces dimensions d'espace supplémentaires donnent naissance à un objet physique d'intérêt majeur pour les théories des cordes, soit les D-Branes. Elles ont été définies en termes d'action, en utilisant des notions de relativité restreinte et de mécanique analytique. Ces D-Branes représentent en fait un objet fixant au moins une des extrémités des cordes ouvertes, et peuvent avoir autant de dimensions que le nombre de dimensions dans lequel elles évoluent. On parle alors de D_p -Branes, où p représente la dimension de l'objet. Dépendamment des configurations des cordes vis-à-vis des D-Branes (si elles sont fixées aux deux bouts, à un seul bout, si les deux bouts sont fixés à deux D-Branes différentes, etc.) et de leurs modes de vibrations, plusieurs phénomènes physiques resurgissent des équations de champ, tels l'électromagnétisme ou la théorie électrofaible. Dans de tels cas, les mathématiques derrière toutes ces configurations de cordes et de D-Branes nécessitent des notions de symétrie et de théorie des groupes pour être adéquatement expliquées. Les théories de Yang-Mills, entre autres, sont très intéressantes à cet effet. Finalement, les théories de Yang-Mills d'à partir de $U(4)$, utilisées de concert avec la super-symétrie, donnent lieu à une toute autre catégorie de théories, soit les théories des supercordes ; si le nombre de dimensions pour les théories des cordes est de 26 (25 spatiales, une temporelle), il n'y en a que 10 (neuf spatiales, une temporelle) pour les théories des supercordes.

Certains problèmes surgissent de la théorie des cordes. Notamment, le choix de paramétrisation utilisée pour les D-Branes (soit, σ et τ) permettent des cas particuliers à profusion pour les D-Branes, ce qui permet en retour de prédire à peu près n'importe quoi et son contraire, allant même à des situations physiques impossibles dans notre univers. En fait, ça a le potentiel de décrire n'importe quelle version

possible et imaginable de l'univers avec un nombre presque infini de conditions initiales préalables à notre univers. Il serait intéressant de se demander, pourquoi un ensemble de conditions initiales particulières ont donné naissance à l'univers qu'on connaît, et de quoi aurait l'air l'univers si les conditions initiales avaient été que très légèrement différentes. Cependant, il faut se rappeler que pour pouvoir avoir de vraies lois scientifiques, il faudrait en principe répéter une expérience un nombre suffisant de fois pour être en mesure de prédire avec efficacité le résultat de l'expérience si elle était répétée une fois de plus. Ceci implique tout naturellement qu'un observateur se situe à l'extérieur de l'expérience elle-même. Or, aussi loin que l'homme sache, l'univers ne s'est produit qu'une seule fois, et comme nous en faisons partie, on ne peut que spéculer sur ce qui arriverait dans un univers extérieur, sans jamais pouvoir expérimenter sur l'univers en entier. À ce sens, on sort du paradigme scientifique.

Ce n'est pas dire que la théorie des cordes n'est plus de la science, loin de là. Elle a été dérivée d'à partir de lois déjà établies scientifiquement parlant. Par contre, cela vient donner un exercice de pensée convaincant montrant que la théorie des cordes ne pourra probablement jamais être vérifiée dans son entièreté par une expérience se basant sur le paradigme scientifique actuel, pas plus qu'elle ne pourra être réfutée de manière similaire. C'est d'ailleurs là, bien que paradoxalement, à la fois une force et une faiblesse de cette théorie. N'empêche que la promesse d'une théorie expliquant toute interaction et toute particule physique est extrêmement alléchante, peut-être trop alléchante même, mais qui contribue énormément au mystère qu'elle représente. En tant que physicien(ne)s, il devient difficile de résister à l'appel de l'inconnu ; que ce soit pour prouver la théorie des cordes, pour la réfuter, ou pour prouver qu'une alternative est la solution, la curiosité de tout un chacun motivera tôt ou tard la prochaine grande découverte de demain.

Références

- [1] History of string theory. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=History_of_string_theory&oldid=888887153.
- [2] Kaluza–Klein theory. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Kaluza%E2%80%93Klein_theory&oldid=889553386.
- [3] Yang-mills theory. https://en.wikipedia.org/wiki/Yang%E2%80%93Mills_theory.
- [4] Luc Marleau : Notes de Cours, Physique des Particules. Université Laval, 2019.
- [5] Lee Smolin : The trouble with physics : the rise of string theory, the fall of a science and what comes next. Mariner Book, Boston u.a, 2007.
- [6] Barton Zwiebach : A first course in string theory. Cambridge University Press, New York, 2004.