

UNIVERSITÉ LAVAL

PHY-3501

PHYSIQUE DES PARTICULES

Résolution explicite du boson libre en théorie conforme des champs

Étudiants :

Théo PINET (111 131 600)

Paul FONTAINE (111 134 023)

Professeur :

Luc MARLEAU

18 avril 2018

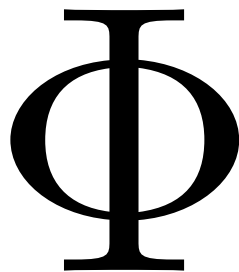


Table des matières

1	Motivation	3
2	Théorie de Lie	4
2.1	Définition générale	4
2.2	Représentations et \mathfrak{g} -modules	5
2.3	Quotient de \mathfrak{g} -modules	6
2.4	Exemples détaillés	6
2.4.1	L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$	7
2.4.2	L'algèbre de Lie affine $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$	9
3	Transformations conformes	11
3.1	Invariance conforme	11
3.2	Cas bidimensionnel	13
4	Introduction au boson libre	14
4.1	Boson libre classique	14
4.2	Quantification canonique	16
4.3	Ordre normal	18
5	Résolution du boson libre	21
5.1	Correspondance état-champ	21
5.2	Expansion en produit d'opérateurs	22
5.3	Théorème de Wick	23
5.4	Application des expansions en produit d'opérateurs	26
5.5	Champs primaires	28
5.6	Fonctions de corrélation	29
5.7	Fin de la résolution	33
6	Conclusion	36
A	Remerciements	38
B	Table de notation	38
C	Notions théoriques supplémentaires	39
C.1	Analyticité	39
C.2	Intégration complexe	39
C.3	Séries de Laurent	39
D	Calculs supplémentaires	40

Remarque : Les sections 2 et 5 ainsi que l'annexe D ont été rédigées par Théo Pinet tandis que les sections 3 et 4 ont été rédigées par Paul Fontaine. Le reste du document résulte d'un travail mutuel.

1 Motivation

Plusieurs théories physiques sont bâties sur un principe de symétrie selon lequel l'invariance sous certaines transformations est imposée. On retient à titre d'exemples les principes de relativité restreinte et de relativité générale, pour lesquels on impose l'invariance sous le groupe de Poincaré, généré entre autres par les transformations de Lorentz. L'invariance conforme, quant à elle, est satisfaite lorsque les dilatations locales, ou changements d'échelle, n'entraînent aucune modification des équations. Ce principe de symétrie comprend, en particulier, le groupe de Poincaré. Ainsi, une théorie conforme est a priori plus symétrique que si elle n'était que relativiste.

Il arrive à l'occasion qu'une théorie physique présente une violation de symétrie, c'est-à-dire que les équations la régissant perdent leur invariance sous les transformations d'intérêt. En physique statistique, les phénomènes critiques, ou transitions de phase, surviennent précisément lors d'une telle violation. D'autre part, en physique des particules, le mécanisme de Higgs permet d'expliquer précisément la masse des bosons Z^0 et W^\pm . D'une certaine façon, cette masse correspond à une brisure de la symétrie de jauge ; le principe d'invariance sur lequel repose le modèle standard.

Généralement, les théories physiques sont décrites par une (ou des) longueur caractéristique, c'est-à-dire une grandeur permettant de décrire la portée des interactions. Celles-ci établissent alors une notion de grandeur relative entre les différentes quantités mesurables de la théorie. Il va donc de soi que, à moins d'être nulles ou infinies, elles ne sont pas invariantes sous toutes dilatations locales. Typiquement, la mesure expérimentale des longueurs caractéristiques permet de valider l'exactitude d'une théorie. Par conséquent, la symétrie conforme ne peut pas être un principe privilégié en toutes circonstances. Cependant, lorsque les longueurs ne sont plus bien définies, il y a brisure de symétrie et l'invariance conforme s'impose de nouveau.

Historiquement, l'invariance conforme fut introduite afin d'étudier les phénomènes critiques des systèmes statistiques. Un exemple typique est offert par les modèles statistiques en réseau. Le plus célèbre d'entre eux, le modèle d'Ising, un réseau de spins en interaction de type plus proche voisin, est entre autres décrit par deux longueurs caractéristiques d'importance, soit la distance a entre les noeuds du réseau et la distance de corrélation ξ . Cette dernière dépend de la température du système, contrairement à a , et correspond à la distance au-delà de laquelle deux spins ne s'influencent plus. En général, le système n'est pas symétrique sous changement d'échelle. Toutefois, dans certaines circonstances dictées par des paramètres extérieurs (e.g. la température), $\xi \rightarrow \infty$ et le modèle d'Ising devient invariant sous transformations conformes. En effet, étudier la corrélation à grande distance l par rapport à a , donc $a \ll l$ (i.e. $a \rightarrow 0$), ne fait plus appel à aucune notion d'échelle, car cette distance sera toujours infime par rapport à ξ , i.e. $l \ll \xi$. C'est à ce moment que l'invariance sous dilatation locale survient. Dans ce cas, $a \ll l \ll \xi$ et cette relation demeure inchangée sous contraction ou dilatation de l . Bref, ce court exemple permet d'apprécier toute l'importance d'étudier l'invariance conforme.

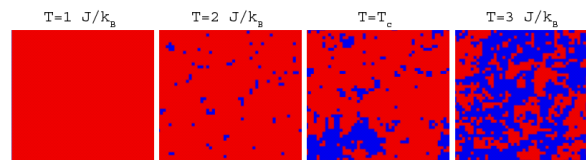


FIGURE 1 – Transition de phase du modèle d'Ising bidimensionnel (Source : [1]).

En outre, ce qui est aujourd'hui considéré comme étant la motivation principale de la physique contemporaine, soit l'unification de la gravité (relativité générale) et des autres interactions fondamentales (modèle standard), fait intervenir largement, selon les théories, l'invariance conforme. La théorie des cordes, pour ne nommer que celle-là, présente tout naturellement une symétrie conforme. C'est d'ailleurs l'objet d'intérêt du présent document. En effet, le boson libre sans masse et sans spin, le problème le plus simple de la théorie conforme des champs en 2 dimensions, sera ici explicitement résolu à partir de l'étude des représentations de son algèbre de symétrie $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$. Par résolution, les auteurs entendent la détermination complète des corrélateurs de ce modèle ; les homologues des longueurs caractéristiques. Une légère digression algébrique sera aussi offerte aux lecteurs à propos des algèbres de Lie et de leurs représentations.

2 Théorie de Lie

La théorie de Lie correspond d'une certaine façon au cadre général sur lequel les théories conformes sont construites. En effet, les opérations effectuées au sein d'une théorie conforme ont toujours lieu au coeur d'un \mathfrak{g} -module appelé *module de Verma*. Il est ainsi essentiel de bien maîtriser la théorie de la représentation des algèbres apparaissant dans une théorie conforme donnée avant d'amorcer sa résolution. Dans cette section, inspirée principalement de [2], [3], [4] et [5], les définitions fondamentales de la théorie des algèbres de Lie sont présentées et la théorie de la représentation de deux algèbres complexes (i.e. $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ et $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$) sur leurs modules de Verma est explicitée.

2.1 Définition générale

Une *algèbre de Lie* \mathfrak{g} est un espace vectoriel sur un corps \mathbb{F} (i.e. \mathbb{R} ou \mathbb{C}) muni d'une opération \mathbb{F} -bilinéaire $[-, -] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, appelée *crochet de Lie*, antisymétrique et respectant l'identité de Jacobi; c'est-à-dire, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$,

1. $[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z]$ et $[x, \alpha y + \beta z] = \alpha[x, y] + \beta[x, z]$ (Bilinéarité)
2. $[x, y] = -[y, x]$ (Antisymétrie)
3. $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ (Identité de Jacobi)

Par exemple, l'ensemble des opérateurs linéaires d'un \mathbb{F} -espace vectoriel V à lui-même peut être muni de la structure d'une algèbre de Lie, notée $\mathfrak{gl}(V)$, avec comme crochet de Lie le commutateur¹. De plus, si $\dim_{\mathbb{F}} V = n \in \mathbb{N}$, l'algèbre $\mathfrak{gl}(V)$ correspond à un ensemble de matrices $n \times n$ à coefficients dans \mathbb{F} et la composition d'applications dans le commutateur est remplacée par le produit matriciel. Dans ce cas, on note $\mathfrak{gl}(V) = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$.

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie sur un corps \mathbb{F} . Une *sous-algèbre de Lie* \mathfrak{h} de \mathfrak{g} est simplement un sous-espace vectoriel de \mathfrak{g} (i.e. un ensemble fermé sous les combinaisons \mathbb{F} -linéaires) tel que

$$\forall x, y \in \mathfrak{h}, [x, y] \in \mathfrak{h}; \text{ avec } [-, -] \text{ le crochet de Lie de } \mathfrak{g}.$$

Par exemple, l'ensemble des matrices $n \times n$ de trace nulle à coefficients dans \mathbb{F} correspond à une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$, notée $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$, puisqu'une combinaison \mathbb{F} -linéaire et un commutateur de matrices de trace nulle est une matrice de trace nulle. Plus explicitement, l'algèbre $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ est générée \mathbb{C} -linéairement par les matrices (avec σ_i la i -ème matrice de Pauli)

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2); \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2); \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_3$$

et satisfait les relations de commutation

$$[H, E] = 2E; \quad [H, F] = -2F; \quad [E, F] = H$$

D'autres exemples physiquement intéressants de sous-algèbres de Lie réelles (i.e. sur le corps $\mathbb{F} = \mathbb{R}$) de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ sont

1. $\mathfrak{so}(n)$, qui est associé à l'ensemble des matrices réelles $n \times n$ antisymétriques;
2. $\mathfrak{u}(n)$, qui est associé à l'ensemble des matrices complexes $n \times n$ antihermitiennes;
3. $\mathfrak{su}(n)$, qui est associé à l'ensemble des matrices complexes $n \times n$ antihermitiennes de trace nulle.

Ces algèbres de Lie sont réelles car les ensembles sous-jacents ne sont pas fermés sous la multiplication par i . En effet, il peut être aisément vérifié que, si $A \in \mathfrak{u}(n)$ est une matrice $n \times n$ antihermitienne, alors la matrice iA est hermitienne.

Un autre exemple particulièrement important d'algèbre de Lie en théorie conforme des champs est donné par l'algèbre complexe (i.e. sur le corps $\mathbb{F} = \mathbb{C}$) de Virasoro, notée \mathfrak{Vir} , qui possède une \mathbb{C} -base de dimension infinie $\{L_n | n \in \mathbb{Z}\} \cup \{c\}$ et dont le crochet de Lie est donné sur cette base par

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}, \quad [L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{1}{12}c(m^3 - m)\delta_{m+n=0} \quad \text{et} \quad [L_m, c] = 0 \quad (2.1)$$

1. C'est-à-dire, $\forall x, y \in \mathfrak{gl}(V)$, $[x, y] = x \circ y - y \circ x$ avec \circ la composition d'applications. Il est important de différencier $\mathfrak{gl}(V)$ du groupe général linéaire $\text{GL}(V)$ qui ne contient que des opérateurs linéaires inversibles.

Ce crochet est ensuite étendu bilinéairement à tout \mathfrak{Vir} . Il est clairement antisymétrique et satisfait à l'identité de Jacobi puisque, $\forall l, m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} [[L_l, L_m], L_n] + [[L_m, L_n], L_l] + [[L_n, L_l], L_m] &\doteq (l-m)[L_{l+m}, L_n] + (m-n)[L_{m+n}, L_l] + (n-l)[L_{n+l}, L_m] \\ &\doteq (l-m)(l+m-n)L_{l+m+n} + (m-n)(m+n-l)L_{l+m+n} + (n-l)(n+l-m)L_{l+m+n} + \frac{c}{12} \times \\ &\quad \left\{ (l-m) \left((l+m)^3 - l-m \right) + (m-n) \left((m+n)^3 - m-n \right) + (n-l) \left((n+l)^3 - n-l \right) \right\} \delta_{l+m+n=0} \\ &\doteq \frac{c}{6} (l+m+n)(l-m)(l-n)(m-n) \delta_{l+m+n=0} = 0 \end{aligned}$$

Il est essentiel de se rappeler que les éléments de base L_n et c sont des éléments formels et que le crochet de Lie défini pour \mathfrak{Vir} n'est pas un commutateur matriciel. Or, il s'avère qu'en général, l'élément $c \in \mathfrak{Vir}$ correspond à une constante réelle appelée *charge centrale*.

Les algèbres de Lie $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$, $\mathfrak{u}(n)$, $\mathfrak{o}(n)$, $\mathfrak{su}(n)$ et $\mathfrak{so}(n)$ peuvent aussi être définies plus généralement qu'en termes de matrices. L'astuce est de définir des éléments formels et un crochet de Lie tels que les relations de commutation matricielles demeurent conservées. Par exemple, l'algèbre $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ des matrices 2×2 de trace nulle peut tout aussi bien être définie comme $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \text{span}_{\mathbb{C}}(\{E, F, H\})$ avec E, F et H trois éléments formels tels que

$$[H, E] = 2E; \quad [H, F] = -2F; \quad [E, F] = H$$

et où le crochet de Lie n'est pas *a priori* un commutateur matriciel. C'est cette définition, communément utilisée en théorie de Lie, qui sera considérée dans ce document. L'algèbre correspondant à la définition matricielle de la page précédente sera notée $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{Mat}$ pour fins de différentiation.

2.2 Représentations et \mathfrak{g} -modules

Soient $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ deux algèbres de Lie sur un corps \mathbb{F} et $\phi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ une application \mathbb{F} -linéaire. Alors, ϕ est un *morphisme d'algèbres de Lie* si elle est compatible avec les crochets de \mathfrak{g}_1 et \mathfrak{g}_2 , c'est-à-dire que

$$\forall x, y \in \mathfrak{g}_1, \phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)]$$

où le premier crochet se fait dans \mathfrak{g}_1 et le second dans \mathfrak{g}_2 .

Par ailleurs, on dit qu'un morphisme d'algèbre de Lie $\phi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ est un *isomorphisme* s'il est bijectif et si son inverse est aussi un morphisme d'algèbres de Lie. Dans ce cas, on note $\mathfrak{g}_1 \simeq \mathfrak{g}_2$.

Par exemple, les algèbres $\mathfrak{su}(2)$ et $\mathfrak{so}(3)$ sont isomorphes (voir [2] pour la démonstration). Plus simplement, l'application $\varphi : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$ définie par

$$\varphi(E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y); \quad \varphi(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y); \quad \varphi(H) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_z$$

et étendue \mathbb{C} -linéairement à tout $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ est trivialement un morphisme d'algèbres de Lie étant donné que le crochet de Lie (formel) de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ a été défini pour respecter les relations de commutation des matrices $\varphi(E)$, $\varphi(F)$ et $\varphi(H)$. Il ne s'agit cependant pas d'un isomorphisme car

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}) \setminus \text{Im } \varphi$$

et cette application n'est ainsi pas bijective (donc non-inversible). Cependant, en considérant sa restriction $\psi : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{Mat}$, on obtient l'isomorphisme désiré et $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{Mat} \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

Une *représentation* d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} sur un \mathbb{F} -espace vectoriel V est un morphisme d'algèbres de Lie $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$. Ainsi, une représentation de \mathfrak{g} sur V associe à chaque élément x de l'algèbre \mathfrak{g} un opérateur \mathbb{F} -linéaire sur V tel que les relations de commutation sont préservées. Dans cette optique, l'application $\varphi : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$ est une représentation de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ sur le \mathbb{C} -espace vectoriel \mathbb{C}^2 . Évidemment, pour tout choix d'algèbre de Lie \mathfrak{g} et de \mathbb{F} -espace vectoriel V , il existe une représentation triviale $o : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ telle que, $\forall x \in \mathfrak{g}$, $o(x) = 0$.

Lorsqu'une représentation $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ est considérée pour un certain \mathbb{F} -espace vectoriel V , on dit que V est un \mathfrak{g} -module. Dans ce cas, un sous- \mathfrak{g} -module de V est un sous-espace vectoriel W (sur \mathbb{F}) tel que, $\forall x \in \mathfrak{g}, \forall |v\rangle \in W, \phi(x)|v\rangle \in W$; c'est-à-dire que W est fermé sous l'action de \mathfrak{g} en tant qu'opérateurs (via la représentation ϕ). Trivialement, tout \mathfrak{g} -module V admet 0 et V comme sous- \mathfrak{g} -modules. On dit que le \mathfrak{g} -module V et la représentation $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ sous-jacente sont *irréductibles* si V n'admet pas d'autre sous- \mathfrak{g} -module que 0 et V . Par exemple, la représentation² $\phi_{\oplus} : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(4, \mathbb{C})$ définie par

$$\phi_{\oplus}(E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \phi_{\oplus}(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \phi_{\oplus}(H) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

admet deux sous- $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -modules différents de 0 et \mathbb{C}^4 (qui est le \mathbb{C} -espace vectoriel sur lequel agit $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{C})$); c'est-à-dire les $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ modules V_1 et V_2 définis comme

$$V_1 \equiv \{(\alpha, \beta, 0, 0)^T \in \mathbb{C}^4 | \alpha, \beta \in \mathbb{C}\} \text{ et } V_2 \equiv \{(0, 0, \alpha, \beta)^T \in \mathbb{C}^4 | \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$$

Ainsi, ϕ_{\oplus} n'est pas une $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -représentation irréductible et \mathbb{C}^4 n'est pas un $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -module irréductible.

En général, en parlant d'un \mathfrak{g} -module V , la notation relative à la représentation ϕ sous-jacente est délaissée et l'action d'un élément $x \in \mathfrak{g}$ sur un vecteur $|v\rangle \in V$ s'écrit $x|v\rangle$ au lieu de $\phi(x)|v\rangle$. Ce raccourci de notation sera ici utilisé et les \mathfrak{g} -modules V seront supposés complexes (i.e. étant des \mathbb{C} -espaces vectoriels) à moins d'avis contraire.

2.3 Quotient de \mathfrak{g} -modules

Soient V un \mathfrak{g} -module (sur un corps \mathbb{F}) et $W \subseteq V$ un sous- \mathfrak{g} -module de V . On définit le \mathfrak{g} -module quotient V/W comme l'ensemble $\{|v\rangle + W | |v\rangle \in V\}$ avec, $\forall |v\rangle \in V, |v\rangle + W \equiv \{|v\rangle + |w\rangle | |w\rangle \in W\}$. Cet ensemble est muni d'une structure canonique de \mathfrak{g} -module sous les opérations, $\forall |v_1\rangle, |v_2\rangle \in V, \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall x \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned} (|v_1\rangle + W) + (|v_2\rangle + W) &= (|v_1\rangle + |v_2\rangle) + W \\ \alpha(|v_1\rangle + W) &= (\alpha|v_1\rangle) + W \\ x(|v_1\rangle + W) &= (x|v_1\rangle) + W \end{aligned}$$

La démonstration que ces opérations sont bien définies peut être trouvée dans [6]. En général, les ensembles $|v\rangle + W$ dans V/W (appelés *translatés*) sont identifiés à un de leur élément³ (i.e. $|v\rangle$). Dans ce cas, pour un \mathfrak{g} -module V de \mathbb{F} -base \mathcal{B}_V et un sous- \mathfrak{g} -module W de \mathbb{F} -base \mathcal{B}_W , la \mathbb{F} -base de V/W peut être choisie comme étant $\mathcal{B}_V \setminus \mathcal{B}_W$. Par exemple, pour toute algèbre de Lie \mathfrak{g} et pour tout \mathfrak{g} -module V , $V/0 \simeq V$ et $V/V \simeq 0$. Par ailleurs, les sous- $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -modules $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{C}^4$ associés à la représentation $\phi_{\oplus} : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(4, \mathbb{C})$ de la section précédente sont tels que

$$\mathbb{C}^4/V_1 \simeq V_2 \text{ et } \mathbb{C}^4/V_2 \simeq V_1$$

En fait, $\mathbb{C}^4 \simeq V_1 \oplus V_2$ en tant que $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -modules.

2.4 Exemples détaillés

Dans cette section, la théorie de la représentation des algèbres $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ et $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$ est étudiée en détail dans le but de consolider les notions acquises dans les sections précédentes. Une présentation formelle des modules de Verma introduits ici peut être trouvée dans [4]. Comme mentionné précédemment, les modules de Verma s'avèrent être fondamentaux à l'étude de la théorie conforme des champs et leur utilisation est primordiale à la résolution du boson libre.

2. Le fait qu'il s'agit bien d'une représentation peut se vérifier directement, mais il suffit en fait de remarquer que, $\forall x \in \{E, F, H\}, \phi_{\oplus}(x) = \varphi(x) \oplus \varphi(x)$ où $\varphi : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$ est la représentation mentionnée précédemment.

3. Le quotient de V par W induit une relation d'équivalence \sim sur V définie comme, pour tout $|v_1\rangle, |v_2\rangle \in V, |v_1\rangle \sim |v_2\rangle \iff |v_1\rangle - |v_2\rangle \in W$. Ainsi, identifier un ensemble $|v\rangle + W$ avec un de ses éléments revient à choisir un représentant dans une classe d'équivalence définie par la relation \sim .

2.4.1 L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Un *module de Verma* V_λ de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ est un $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -module construit à partir d'un état de plus haut poids $|\lambda\rangle \neq 0$ satisfaisant les conditions suivantes :

1. $|\lambda\rangle$ est un état propre de H de valeur propre λ ; c'est-à-dire $H|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$;
2. $|\lambda\rangle$ est annihilé par E ; c'est-à-dire $E|\lambda\rangle = 0$.

Avec seulement ces informations, il s'avère qu'il est possible d'obtenir la structure exacte de V_λ .

Lemme 2.1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $HF^n|\lambda\rangle = (\lambda - 2n)F^n|\lambda\rangle$ et $EF^n|\lambda\rangle = [E, F^n]|\lambda\rangle = n(\lambda - n + 1)F^{n-1}|\lambda\rangle$

Démonstration. On procède par induction sur n . Pour $n = 1$, le résultat est valide puisque

$$HF|\lambda\rangle = (FH + [H, F])|\lambda\rangle = FH|\lambda\rangle - 2F|\lambda\rangle = (\lambda - 2)F|\lambda\rangle \text{ et } [E, F]|\lambda\rangle = H|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$$

De plus, si on suppose que, pour un certain $n \geq 1$, le lemme est valide, on a

$$\begin{aligned} HF^{n+1}|\lambda\rangle &= HFF^n|\lambda\rangle = (FH + [H, F])F^n|\lambda\rangle = FHF^n|\lambda\rangle - 2F^{n+1}|\lambda\rangle \\ &= F(\lambda - 2n)F^n|\lambda\rangle - 2F^{n+1}|\lambda\rangle = (\lambda - 2n - 2)F^{n+1}|\lambda\rangle = (\lambda - 2(n+1))F^{n+1}|\lambda\rangle \\ \text{et } [E, F^{n+1}]|\lambda\rangle &= (F[E, F^n] + [E, F]F^n)|\lambda\rangle = (Fn(\lambda - n + 1)F^{n-1} + HF^n)|\lambda\rangle \\ &= n(\lambda - n + 1)F^n|\lambda\rangle + (\lambda - 2n)F^n|\lambda\rangle = ((n+1)\lambda - n^2 - n)F^n|\lambda\rangle \\ &= ((n+1)\lambda - (n+1)^2 + n + 1)F^n|\lambda\rangle = (n+1)(\lambda - (n+1) + 1)F^n|\lambda\rangle \end{aligned}$$

Ainsi, le résultat est démontré $\forall n \in \mathbb{N}$ par le principe d'induction mathématique. \square

Par conséquent, une construction de V_λ en tant que \mathbb{C} -espace vectoriel est $V_\lambda = \text{span}_{\mathbb{C}} \{F^n|\lambda\rangle \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ et une représentation $\varphi : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow V_\lambda$ est généralement de dimension infinie. Cependant, en définissant un produit scalaire canonique $(-, -) : V_\lambda \times V_\lambda \rightarrow \mathbb{C}$, appelé *forme de Shapovalov*, on remarque, avec un peu de travail, que le complément orthogonal $V_\lambda^\perp \equiv \{ |w\rangle \in V_\lambda \mid \forall |v\rangle \in V_\lambda, (|w\rangle, |v\rangle) = 0 \}$ permet parfois la création d'un $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -module de dimension finie particulièrement intéressant. En effet,

Proposition 2.1. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, V_λ^\perp est un sous- $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -module de V_λ et le $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -module quotient $V_\lambda/V_\lambda^\perp$ est de dimension finie si et seulement si $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Dans ce cas, $\dim_{\mathbb{C}}(V_\lambda/V_\lambda^\perp) = \lambda + 1$.*

Avant de démontrer ce résultat, il est nécessaire d'introduire adéquatement la forme de Shapovalov. Ce produit scalaire est défini sur la base de V_λ par

$$(|\lambda\rangle, |\lambda\rangle) = 1 \quad \text{et} \quad \forall m, n \geq 0, (F^m|\lambda\rangle, F^n|\lambda\rangle) = (|\lambda\rangle, E^m F^n|\lambda\rangle) = (E^n F^m|\lambda\rangle, |\lambda\rangle)$$

et est étendu (\mathbb{C} -antilinéairement pour la première variable et \mathbb{C} -linéairement pour la seconde) sur tout le module de Verma. Par exemple,

$$\begin{aligned} ((3+2i)F|\lambda\rangle, (1-i)F|\lambda\rangle) &= (3+2i)^*(1-i)(F|\lambda\rangle, F|\lambda\rangle) = (3-2i)(1-i)(|\lambda\rangle, EF|\lambda\rangle) \\ &= (1-5i)(|\lambda\rangle, ([E, F] + FE)|\lambda\rangle) = (1-5i)(|\lambda\rangle, H|\lambda\rangle) + (1-5i)(|\lambda\rangle, 0) \\ &= (1-5i)\lambda(|\lambda\rangle, |\lambda\rangle) = (1-5i)\lambda \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Remarquons que, si $|\mu\rangle, |\nu\rangle \in V_\lambda$ sont tels que $H|\mu\rangle = \mu|\mu\rangle$ et $H|\nu\rangle = \nu|\nu\rangle$ (avec $\mu, \nu \in \mathbb{C}$), alors

$$\begin{aligned} \mu^*(|\mu\rangle, |\nu\rangle) &= (\mu|\mu\rangle, |\nu\rangle) = (H|\mu\rangle, |\nu\rangle) = ([E, F]|\mu\rangle, |\nu\rangle) = (EF|\mu\rangle, |\nu\rangle) - (FE|\mu\rangle, |\nu\rangle) \\ &= (F|\mu\rangle, F|\nu\rangle) - (E|\mu\rangle, E|\nu\rangle) = (|\mu\rangle, EF|\nu\rangle) - (|\mu\rangle, FE|\nu\rangle) = (|\mu\rangle, [E, F]|\nu\rangle) \\ &= (|\mu\rangle, H|\nu\rangle) = (|\mu\rangle, \nu|\nu\rangle) = \nu(|\mu\rangle, |\nu\rangle) \end{aligned}$$

Ainsi, $(\mu^* - \nu)(|\mu\rangle, |\nu\rangle) = 0$ et $(|\mu\rangle, |\nu\rangle) = 0$ si $\mu^* \neq \nu$. Par conséquent, des états propres de H associés à des valeurs propres qui ne sont pas reliées par conjugaison complexe sont orthogonaux sous la forme de Shapovalov. En particulier, deux états propres de H à valeur propre réelle sont orthogonaux s'ils n'appartiennent pas au même espace propre.

Par ailleurs, on a le lemme suivant.

Lemme 2.2. $\forall n, m \in \mathbb{N}$, si $m \leq n$, $[E^m, F^n]|\lambda\rangle = \left(\prod_{i=0}^{m-1} (n-i)(\lambda-n+1+i) \right) F^{n-m}|\lambda\rangle$

Démonstration. On procède par induction sur m . Si $m = 1$, l'énoncé correspond à la deuxième partie du lemme 2.1. Supposons maintenant que l'énoncé soit vrai pour un certain $m \geq 1$ et $\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq m}$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq m+1$,

$$\begin{aligned} [E^{m+1}, F^n]|\lambda\rangle &= (E[E^m, F^n] + [E, F^n]E^m)|\lambda\rangle = \left(\prod_{i=0}^{m-1} (n-i)(\lambda-n+1+i) \right) EF^{n-m}|\lambda\rangle \\ &= \left(\prod_{i=0}^{m-1} (n-i)(\lambda-n+1+i) \right) ([E, F^{n-m}] + F^{n-m}E)|\lambda\rangle \\ &\stackrel{1}{=} \left(\prod_{i=0}^{m-1} (n-i)(\lambda-n+1+i) \right) (n-m)(\lambda-(n-m)+1)F^{n-m-1}|\lambda\rangle \\ &= \left(\prod_{i=0}^m (n-i)(\lambda-n+1+i) \right) F^{n-m-1}|\lambda\rangle \end{aligned}$$

où le lemme 2.1 a été utilisé à l'égalité 1. Le résultat est alors démontré $\forall m, n \in \mathbb{N}$ par le principe d'induction mathématique. \square

Il est maintenant possible de démontrer la proposition 2.1. Remarquons que, selon le lemme 2.1, un vecteur de base $F^n|\lambda\rangle$ (avec $n \geq 0$) du module de Verma V_λ est un état propre de H associé à la valeur propre⁴ $\lambda - 2n \in \mathbb{R}$. Par conséquent, si $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ sont tels que $n \neq m$, les états $F^n|\lambda\rangle$ et $F^m|\lambda\rangle$ sont associés à des valeurs propres différentes de H et sont donc orthogonaux sous la forme de Shapovalov. La base $\{F^n|\lambda\rangle | n \geq 0\}$ est ainsi orthogonale. Par ailleurs, $\forall n > 0$,

$$\begin{aligned} (F^n|\lambda\rangle, F^n|\lambda\rangle) &= (|\lambda\rangle, E^n F^n|\lambda\rangle) = (|\lambda\rangle, ([E^n, F^n] + F^n E^n)|\lambda\rangle) = (|\lambda\rangle, [E^n, F^n]|\lambda\rangle) \\ &= \left(\prod_{i=0}^{n-1} (n-i)(\lambda-n+1+i) \right) (|\lambda\rangle, |\lambda\rangle) = n! \prod_{i=0}^{n-1} (\lambda-n+1+i) \end{aligned}$$

Par conséquent, on peut résumer l'action de la forme de Shapovalov sur la base de V_λ avec l'équation, valide $\forall m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$;

$$(F^m|\lambda\rangle, F^n|\lambda\rangle) = n! \delta_{m=n} \prod_{i=0}^{n-1} (\lambda-n+1+i) \quad (2.2)$$

Puisque la base $\{F^n|\lambda\rangle | n \geq 0\}$ est orthogonale, un vecteur de base $F^n|\lambda\rangle$ (avec $n \geq 0$) appartient au complément orthogonal V_λ^\perp si et seulement si $(F^n|\lambda\rangle, F^n|\lambda\rangle) = 0$. En effet, dans ce cas, par la bilinéarité de la forme de Shapovalov, $(F^n|\lambda\rangle, \alpha F^m|\lambda\rangle) = 0$ pour tout $m \geq 0$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$; ce qui est suffisant pour que $F^n|\lambda\rangle$ soit orthogonal à tous les vecteurs de V_λ . De plus, selon l'équation 2.2, un vecteur $F^n|\lambda\rangle$ satisfait $(F^n|\lambda\rangle, F^n|\lambda\rangle) = 0$ si et seulement si il existe un indice $i \in \{0, \dots, n-1\}$ tel que $\lambda - n + 1 + i = 0$; c'est-à-dire $n = \lambda + i + 1 \geq \lambda + 1$ et $\lambda = n - (i + 1) \geq 0$ est un entier non-négatif. Ainsi, en particulier, $m = \lambda + 1$ est le nombre entier minimal tel que $F^m \in V_\lambda^\perp$ si $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Par ailleurs, si $\lambda \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$, il est clair, à l'aide de l'équation 2.2, qu'aucun vecteur de base n'est orthogonal à tout le module de Verma. Dans ce cas, $V_\lambda^\perp = 0$ et il s'agit trivialement d'un sous- $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -module de V_λ . En outre, dans cette situation, le quotient $V_\lambda/V_\lambda^\perp \simeq V_\lambda$ est certainement de dimension infinie.

On considère donc le cas où $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et où $F^{\lambda+1}|\lambda\rangle \in V_\lambda^\perp \neq \emptyset$. Alors, V_λ^\perp est encore un sous- $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -module de V_λ , mais un peu plus de travail est nécessaire pour s'en assurer. D'abord, si $F^n|\lambda\rangle \in V_\lambda^\perp$,

$$(F^{n+1}|\lambda\rangle, F^{n+1}|\lambda\rangle) = (F^n|\lambda\rangle, EF^{n+1}|\lambda\rangle) = 0 = (F^n|\lambda\rangle, FEF^n|\lambda\rangle) = (EF^n|\lambda\rangle, EF^n|\lambda\rangle)$$

et $F^{n+1}, EF^n \in V_\lambda^\perp$. De plus, selon le lemme 2.1,

$$(HF^n|\lambda\rangle, HF^n|\lambda\rangle) = (\lambda - 2n)^2 (F^n|\lambda\rangle, F^n|\lambda\rangle) = 0 \text{ et } HF^n \in V_\lambda^\perp$$

et V_λ^\perp est bien un sous- $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -module de V_λ étant donné qu'il est clairement fermé sous les combinaisons \mathbb{C} -linéaires par la définition de la forme de Shapovalov.

4. Cette affirmation est en effet trivialement vraie pour $n = 0$.

Alors, puisque $m = \lambda + 1$ est le nombre entier minimal tel que $F^m |\lambda\rangle$ soit dans le complément orthogonal, $V_\lambda^\perp = \text{span}_{\mathbb{C}}(\{F^m |\lambda\rangle | m \geq \lambda + 1\})$ et $V_\lambda/V_\lambda^\perp \simeq \text{span}_{\mathbb{C}}(\{F^p |\lambda\rangle | 0 \leq p \leq \lambda\})$ est alors de dimension $\lambda + 1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Ainsi, la proposition 2.1 est démontrée. \square

Avec la fin de cette démonstration, la théorie de la représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ sur ses modules de Verma est totalement explicitée. Dans [2], il est aussi prouvé que tous les $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -modules irréductibles de dimension finie sont isomorphes à un module quotient $V_\lambda/V_\lambda^\perp$ avec $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

En outre, le quotient $V_\lambda/V_\lambda^\perp$ est très important d'un point de vue physique. En effet, dans le contexte de la théorie des champs conformes, les observables sont généralement décrites en termes de produits scalaires entre certains états d'un module de Verma V_λ . Alors, puisque des mesures sur un état du complément V_λ^\perp aboutiraient toujours en des résultats nuls (étant donné que la forme de Shapovalov correspond au produit scalaire sur V_λ), il n'y a aucun mal à envoyer ce sous- $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -module vers le module trivial 0. Mathématiquement, cela revient exactement à prendre le quotient $V_\lambda/V_\lambda^\perp$. Il est donc possible de voir ce quotient comme l'ensemble des états physiques non-nuls de notre théorie.

2.4.2 L'algèbre de Lie affine $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$

L'espace vectoriel $\text{span}_{\mathbb{C}}(\{a_n | n \in \mathbb{Z}\}) \oplus \mathbb{C}$ peut être muni d'une structure d'algèbre de Lie, notée $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$, à l'aide du crochet de Lie défini comme, $\forall m, n \in \mathbb{Z}$,

$$[a_m, a_n] = m\delta_{m+n=0} \quad \text{et} \quad [1, a_m] = 0$$

Il est à noter que les éléments engendrant cet algèbre sont des éléments formels indépendants et que $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$ peut donc également être vu comme un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension infinie. Or, malgré cette légère complication dimensionnelle, il s'avère que la démarche de la section précédente peut être répétée et que l'algèbre $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$ admet aussi une théorie de la représentation intéressante en termes de modules de Verma (appelés aussi dans ce cas *espaces de Fock*).

La construction du module de Verma V_λ (avec $\lambda \in \mathbb{R}$) pour l'algèbre $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$ se fait de la même manière que pour $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Or, dans ce cas, l'état de plus haut poids $|\lambda\rangle$ doit respecter les conditions

1. $|\lambda\rangle$ est un état propre de a_0 ; c'est-à-dire $a_0 |\lambda\rangle = \lambda |\lambda\rangle$;
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\lambda\rangle$ est annihilé par a_n ; c'est-à-dire $a_n |\lambda\rangle = 0$.

Pour déterminer explicitement la base de V_λ , il est cependant nécessaire de travailler un peu plus fort qu'avec $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Heureusement, les calculs demeurent relativement simples.

Proposition 2.2. $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall k \in \mathbb{N}, a_n a_{-n}^k |\lambda\rangle = k n a_{-n}^{k-1} |\lambda\rangle$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Il est clair que l'énoncé est vrai pour $k = 1$ étant donné que

$$a_n a_{-n} |\lambda\rangle = ([a_n, a_{-n}] + a_{-n} a_n) |\lambda\rangle = n |\lambda\rangle$$

De plus, si on suppose l'énoncé vrai pour un certain $k \geq 1$, on a

$$a_n a_{-n}^{k+1} |\lambda\rangle = ([a_n, a_{-n}] + a_{-n} a_n) a_{-n}^k |\lambda\rangle = n a_{-n}^k |\lambda\rangle + a_{-n} a_n a_{-n}^k |\lambda\rangle = (n + k n) a_{-n}^k |\lambda\rangle = (k + 1) n a_{-n}^k |\lambda\rangle$$

et le résultat est démontré $\forall k \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{Z}$, par le principe d'induction mathématique. \square

Proposition 2.3. $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall k, l \in \mathbb{N}, a_n^k a_{-n}^l |\lambda\rangle = \begin{cases} \left(\prod_{j=0}^{k-1} (l - j)\right) n^k a_{-n}^{l-k} |\lambda\rangle & \text{si } k \leq l \\ 0 & \text{si } k > l \end{cases}$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Les deux cas seront considérés séparément.

(Cas 1) Supposons $k \leq l$. On procède par induction sur k . Selon la proposition précédente, l'énoncé est vrai $\forall l \in \mathbb{N}$ si $k = 1$. Supposons donc celui-ci vrai pour un certain $k \in \mathbb{N}$ et $\forall l \geq k$. Alors, si $l \geq k + 1$,

$$\begin{aligned} a_n^{k+1} a_{-n}^l |\lambda\rangle &= a_n a_n^k a_{-n}^l |\lambda\rangle = \left(\prod_{j=0}^{k-1} (l - j)\right) n^k a_n a_{-n}^{l-k} |\lambda\rangle = \left(\prod_{j=0}^{k-1} (l - j)\right) n^{k+1} (l - k) a_{-n}^{l-k-1} |\lambda\rangle \\ &= \left(\prod_{j=0}^k (l - j)\right) n^{k+1} a_{-n}^{l-(k+1)} |\lambda\rangle \text{ et l'induction est finie pour ce cas.} \end{aligned}$$

(Cas 2) Supposons maintenant $k > l$. Alors, selon le cas 1,

$$a_n^k a_{-n}^l |\lambda\rangle = a_n^{k-l} a_n^l a_{-n}^l |\lambda\rangle = \left(\prod_{j=0}^{l-1} (l-j) \right) n^l a_n^{k-l} |\lambda\rangle = 0$$

et la proposition est démontrée. \square

Selon les propositions précédentes et puisque tous les générateurs a_n et a_m commutent si $n \neq -m$, il semble que V_λ soit \mathbb{C} -engendré par l'ensemble $\{a_{-n_1} a_{-n_2} \dots a_{-n_j} |\lambda\rangle \mid j \geq 0 \text{ et } \forall l \in \{1, \dots, j\}, n_l \in \mathbb{N}\}$. Cependant, en raison des règles de commutation des a_n , cet ensemble contient plusieurs éléments redondants et il est ainsi préférable d'écrire

$$V_\lambda = \text{span}_{\mathbb{C}}(E_\lambda) \text{ où } E_\lambda \equiv \{a_{-n_1} a_{-n_2} \dots a_{-n_j} |\lambda\rangle \mid j \geq 0 \text{ et } n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_j \geq 1\}$$

Un élément de l'ensemble E_λ est appelé un *monôme canonique* et, selon le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt [4], E_λ forme une base de V_λ . Il n'existe donc pas de construction explicite de V_λ qui soit de cardinalité strictement inférieure à $|E_\lambda|$ et les modules de Verma de l'algèbre $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$ sont de ce fait de dimension infinie ; tout comme ceux de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. On peut cependant se demander si, comme dans le cas de la section précédente, l'espace des états physiques non-nuls (i.e. le quotient $V_\lambda/V_\lambda^\perp$, avec V_λ^\perp défini adéquatement) est de dimension finie.

Dans le cas de l'algèbre de Lie $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$, la forme de Shapovalov est définie sur l'ensemble E_λ comme $(|\lambda\rangle, |\lambda\rangle) = 1$ et, $\forall a_{-n_1} a_{-n_2} \dots a_{-n_{j_1}} |\lambda\rangle, a_{-m_1} a_{-m_2} \dots a_{-m_{j_2}} |\lambda\rangle \in E_\lambda$,

$$\left(a_{-n_1} a_{-n_2} \dots a_{-n_{j_1}} |\lambda\rangle, a_{-m_1} a_{-m_2} \dots a_{-m_{j_2}} |\lambda\rangle \right) = \left(|\lambda\rangle, a_{n_1} a_{n_2} \dots a_{n_{j_1}} a_{-m_1} a_{-m_2} \dots a_{-m_{j_2}} |\lambda\rangle \right)$$

On étend ensuite cette définition (\mathbb{C} -linéairement sur la seconde variable et \mathbb{C} -antilinéairement sur la première) à tout V_λ . Par exemple, $\forall m, n > 0$ et $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$(\alpha a_{-n} |\lambda\rangle, \beta |\lambda\rangle) = \alpha^* \beta (|\lambda\rangle, a_n |\lambda\rangle) = 0 \text{ et}$$

$$(a_{-m} |\lambda\rangle, a_{-n} |\lambda\rangle) = (|\lambda\rangle, a_m a_{-n} |\lambda\rangle) = \left(|\lambda\rangle, ([a_m, a_{-n}] + a_{-n} a_m) |\lambda\rangle \right) = m \delta_{m-n=0} (|\lambda\rangle, |\lambda\rangle) = m \delta_{m=n}$$

Pour obtenir plus d'informations sur le contenu du complément $V_\lambda^\perp \equiv \{|w\rangle \in V_\lambda \mid \forall |v\rangle \in V_\lambda, (|w\rangle, |v\rangle) = 0\}$, il est utile de ré-écrire l'ensemble E_λ comme

$$E_\lambda = \{\dots a_{-3}^{j_3} a_{-2}^{j_2} a_{-1}^{j_1} |\lambda\rangle \mid \forall k \in \mathbb{N}, j_k \geq 0 \text{ et } \exists m \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq m, j_n = 0\}$$

où la dernière condition dans la définition de l'ensemble du membre de droite vient simplement assurer que seul un nombre fini d'exposants j_k sont non-nuls. Dans ce cas, on remarque que, pour un élément $\dots a_{-3}^{j_3} a_{-2}^{j_2} a_{-1}^{j_1} |\lambda\rangle \in E_\lambda$,

$$(\dots a_{-3}^{j_3} a_{-2}^{j_2} a_{-1}^{j_1} |\lambda\rangle, \dots a_{-3}^{j_3} a_{-2}^{j_2} a_{-1}^{j_1} |\lambda\rangle) = (|\lambda\rangle, a_1^{j_1} a_2^{j_2} a_3^{j_3} \dots a_{-3}^{j_3} a_{-2}^{j_2} a_{-1}^{j_1} |\lambda\rangle) = (|\lambda\rangle, \dots a_{-3}^{j_3} a_{-3}^{j_3} a_{-2}^{j_2} a_{-2}^{j_2} a_{-1}^{j_1} a_{-1}^{j_1} |\lambda\rangle)$$

où, pour la dernière égalité, le fait que $[a_n, a_m] = 0$ si $n \neq -m$ a été utilisé. Par conséquent, à partir de la proposition 2.3 et après un peu d'induction, on en déduit que,

$$(\dots a_{-3}^{j_3} a_{-2}^{j_2} a_{-1}^{j_1} |\lambda\rangle, \dots a_{-3}^{j_3} a_{-2}^{j_2} a_{-1}^{j_1} |\lambda\rangle) = \left(\prod_{r=1}^{\infty} j_r! r^{j_r} \right) (|\lambda\rangle, |\lambda\rangle) = \prod_{r=1}^{\infty} j_r! r^{j_r}$$

Puisque le nombre de j_r non-nuls est fini, ce produit est certainement convergent et strictement positif. Ainsi, aucun élément de E_λ n'est auto-orthogonal et il s'ensuit que $V_\lambda^\perp \cap E_\lambda = \emptyset$. Par conséquent, $V_\lambda^\perp = 0$ et il en découle que le quotient $V_\lambda/V_\lambda^\perp \simeq V_\lambda$ est toujours de dimension infinie. On résume généralement ce résultat par l'affirmation que les $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$ -modules de Verma sont unitaires.

3 Transformations conformes

Dans cette section, les différents types de transformations conformes sont introduits et les générateurs de l'algèbre conforme sont obtenus en mettant l'emphase sur le cas bidimensionnel. Les références principales y étant rattachée sont [3], [7] et [8].

3.1 Invariance conforme

Soit $g_{\mu\nu}$ un tenseur métrique dans un espace-temps \mathcal{E} avec $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}) = d$. Une transformation continue $x \mapsto x'$ est dite *conforme* si elle laisse invariante le tenseur métrique à une constante multiplicative $\Lambda(x)$, strictement positive, près.

$$g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda(x)g_{\mu\nu}(x) \quad (3.1)$$

Autrement dit, une transformation conforme préserve les angles, moyennant éventuellement une dilatation ou une contraction des vecteurs. Les exemples notables de transformations conformes sont les translations, les rotations ou encore les transformations de Lorentz. Clairement, les transformations conformes forment un groupe et en dégager les générateurs correspond à les classifier complètement.

Considérons une transformation inversible infinitésimale quelconque $x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu}(x)$. En découle alors,

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} g'_{\alpha\beta} = (\delta_{\mu}^{\alpha} + \partial_{\mu}\varepsilon^{\alpha})(\delta_{\nu}^{\beta} + \partial_{\nu}\varepsilon^{\beta})g'_{\alpha\beta} = g'_{\mu\nu} + \partial_{\mu}\varepsilon_{\nu} + \partial_{\nu}\varepsilon_{\mu}$$

Puisque la transformation est infinitésimale, le facteur multiplicatif l'est aussi, $g'_{\mu\nu} = (1 - f(x))g_{\mu\nu}$. Par conséquent,

$$\partial_{\mu}\varepsilon_{\nu} + \partial_{\nu}\varepsilon_{\mu} = f(x)g_{\mu\nu} \xrightarrow{g^{\mu\nu}} f(x) = \frac{2}{d}\partial^{\mu}\varepsilon_{\mu} \quad (3.2)$$

Pour la suite de la démarche, $g_{\mu\nu}$ est considéré constant. En différenciant l'identité à gauche de la dernière implication, on obtient,

$$\partial_{\rho}\partial_{\mu}\varepsilon_{\nu} + \partial_{\rho}\partial_{\nu}\varepsilon_{\mu} = g_{\mu\nu}\partial_{\rho}f(x)$$

En permutant les indices μ, ν, ρ et en utilisant la symétrie $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, la précédente équation se reformule tel que

$$2\partial_{\rho}\partial_{\nu}\varepsilon_{\mu} = g_{\rho\mu}\partial_{\nu}f(x) + g_{\nu\mu}\partial_{\rho}f(x) - g_{\rho\nu}\partial_{\mu}f(x) \quad (3.3)$$

Une contraction des indices avec $g^{\rho\nu}$ permet d'obtenir,

$$2\partial^2\varepsilon_{\mu} = (2 - d)\partial_{\mu}f(x) \quad (3.4)$$

En appliquant ∂_{ν} sur l'équation 3.4 et ∂^2 sur le membre à droite de l'implication 3.2, une comparaison permet d'établir la formule suivante.

$$(2 - d)\partial_{\nu}\partial_{\mu}f(x) = g_{\mu\nu}\partial^2f(x) \xrightarrow{g^{\mu\nu}} (1 - d)\partial^2f(x) = 0 \quad (3.5)$$

À partir d'ici, tous les outils nécessaires à la formulation explicite des transformations conformes en d dimensions sont disponibles. D'abord, si $d = 1$, alors l'équation 3.5 est trivialement satisfaite et ε_{μ} est quelconque. Ceci est corroboré par le fait que la notion d'angle en une dimension est absurde. Le cas $d = 2$ sera résolu à la prochaine section. Pour $d > 2$, l'équation 3.4 impose $\partial^2f(x) = 0$, donc $f(x)$ est linéaire.

$$f(x) = a + b_{\mu}x^{\mu} \quad \text{où } a, b_{\mu} \text{ sont des constantes}$$

En substituant dans l'équation 3.3, on a que

$$2\partial_{\rho}\partial_{\nu}\varepsilon_{\mu} = g_{\rho\mu}b_{\nu} + g_{\nu\mu}b_{\rho} - g_{\rho\nu}b_{\mu}$$

d'où on en tire que $\partial_{\rho}\partial_{\nu}\varepsilon_{\mu}$ est constant. Par conséquent, ε_{μ} est quadratique.

$$\varepsilon_{\mu} = \alpha_{\mu} + \beta_{\mu\nu}x^{\nu} + \gamma_{\mu\nu\rho}x^{\nu}x^{\rho} \quad \gamma_{\mu\nu\rho} = \gamma_{\mu\rho\nu}$$

En substituant dans la partie droite de l'équation 3.2 et en utilisant le fait que $g_{\mu\nu}$ est constant, on obtient l'expression suivante.

$$f(x) = \frac{2}{d}\partial_{\mu} \left(\alpha^{\mu} + \beta^{\mu}_{\nu}x^{\nu} + \gamma^{\mu}_{\nu\rho}x^{\nu}x^{\rho} \right) = \frac{2}{d} \left(\beta^{\mu}_{\mu} + 2\gamma^{\mu}_{\mu\nu}x^{\nu} \right)$$

Par ailleurs, la partie symétrique de $\beta_{\mu\nu}$, soit $\frac{1}{2}(\beta_{\mu\nu} + \beta_{\nu\mu})$, est un multiple du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$. En effet, la partie gauche de l'équation 3.2 entraîne le résultat suivant.

$$\begin{aligned} f(x)g_{\mu\nu} &= \frac{2}{d}g_{\mu\nu} \left(\beta^\lambda{}_\lambda + 2\gamma^\lambda{}_{\lambda\rho}x^\rho \right) = \partial_\mu\varepsilon_\nu + \partial_\nu\varepsilon_\mu = [\beta_{\nu\mu} + 2\gamma_{\nu\mu\rho}x^\rho] + [\beta_{\mu\nu} + 2\gamma_{\mu\nu\rho}x^\rho] \\ &\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}(\beta_{\mu\nu} + \beta_{\nu\mu}) = \frac{1}{d}\beta^\lambda{}_\lambda g_{\mu\nu} \\ \gamma_{\mu\nu\rho} + \gamma_{\nu\mu\rho} = \frac{2}{d}\gamma^\lambda{}_{\lambda\rho}g_{\mu\nu} \equiv 2\xi_\rho g_{\mu\nu} \end{cases} \end{aligned}$$

On en conclut donc que la partie antisymétrique de $\beta_{\mu\nu}$, soit $\frac{1}{2}(\beta_{\mu\nu} - \beta_{\nu\mu}) \equiv \omega_{\mu\nu}$, n'est soumise à aucune contrainte. Finalement, l'équation 3.3 permet d'établir une dernière contrainte sur $\gamma_{\mu\nu\rho}$.

$$\begin{aligned} 2\partial_\rho\partial_\nu\varepsilon_\mu &= 4\gamma_{\mu\nu\rho} = g_{\rho\mu}\partial_\nu f(x) + g_{\nu\mu}\partial_\rho f(x) - g_{\rho\nu}\partial_\mu f(x) = \frac{4}{d} \left(g_{\rho\mu}\gamma^\lambda{}_{\lambda\nu} + g_{\nu\mu}\gamma^\lambda{}_{\lambda\rho} - g_{\rho\nu}\gamma^\lambda{}_{\lambda\mu} \right) \\ &\Rightarrow \gamma_{\mu\nu\rho} = g_{\mu\rho}\xi_\nu + g_{\mu\nu}\xi_\rho - g_{\nu\rho}\xi_\mu \end{aligned}$$

De cette résolution, quatre types de transformations conformes peuvent être exhibées.

- les translations : $x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu = x^\mu + \alpha^\mu$
- les dilatations ($\beta_{\mu\nu}$ symétrique) : $x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu = x^\mu + \beta^\mu{}_\nu x^\nu = x^\mu + \zeta g^\mu{}_\nu x^\nu = (1 + \zeta)x^\mu$
- les rotations ($\beta_{\mu\nu}$ antisymétrique) : $x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu = x^\mu + \beta^\mu{}_\nu x^\nu = x^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu$
- les transformations conformes spéciales :

$$x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu = x^\mu + \gamma^\mu{}_{\nu\rho}x^\nu x^\rho = x^\mu + (g^\mu{}_\rho\xi_\nu + g^\mu{}_\nu\xi_\rho - g_{\nu\rho}\xi^\mu)x^\nu x^\rho = x^\mu + 2(\xi \cdot x)x^\mu - x^2\xi^\mu$$

La dernière transformation, moins familière, peut entre autres être formulée différemment.

Proposition 3.1. *Les transformation conformes spéciales prennent la forme $x'^\mu = \frac{x^\mu - \xi^\mu x^2}{1 - 2\xi \cdot x + \xi^2 x^2}$.*

Démonstration. Débutons en faisant l'association suivante :

$$x'^\mu = x^\mu + dx^\mu = x^\mu + 2(\xi \cdot x)x^\mu - x^2\xi^\mu \Rightarrow dx^\mu = 2(\xi \cdot x)x^\mu - x^2\xi^\mu$$

Puis, effectuons le changement de variables $y^\mu = \frac{x^\mu}{x^2}$. Nous avons alors la différentielle suivante.

$$dy^\mu = \frac{1}{x^4} \left(x^2 dx^\mu - 2x^\mu x_\nu dx^\nu \right) = \frac{1}{x^4} \left(x^2 \left[2(\xi \cdot x)x^\mu - x^2\xi^\mu \right] - 2x^\mu x_\nu \left[2(\xi \cdot x)x^\nu - x^2\xi^\nu \right] \right) = -\xi^\mu$$

Par conséquent, le tout se reformule tel que

$$y'^\mu = y^\mu + dy^\mu = y^\mu - \xi^\mu \Rightarrow \frac{x'^\mu}{x'^2} = \frac{x^\mu}{x^2} - \xi^\mu \equiv A^\mu$$

Nous obtenons alors une équation dite transversion. Celle-ci se résout simplement de la sorte.

$$A^2 = A^\mu A_\mu = \frac{x'^\mu x'_\mu}{x'^4} = \frac{1}{x'^2} \Rightarrow A^\mu = \frac{x'^\mu}{x'^2} = A^2 x'^\mu \Rightarrow x'^\mu = \frac{A^\mu}{A^2}$$

Ce faisant, il ne suffit que d'évaluer A^2 .

$$A^\mu A_\mu = \left(\frac{x^\mu}{x^2} - \xi^\mu \right) \left(\frac{x_\mu}{x^2} - \xi_\mu \right) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2}(\xi \cdot x) + \xi^2 = \frac{1}{x^2} \left(1 - 2\xi \cdot x + \xi^2 x^2 \right)$$

Finalement nous obtenons la formulation voulue.

$$x'^\mu = \left(\frac{x^\mu}{x^2} - \xi^\mu \right) \left(\frac{1}{x^2} \left(1 - 2\xi \cdot x + \xi^2 x^2 \right) \right)^{-1} = \frac{x^\mu - \xi^\mu x^2}{1 - 2\xi \cdot x + \xi^2 x^2}$$

□

Puisque les transformations conformes infinitésimales pour $d > 2$ ont été dégagées, on peut désormais en obtenir les générateurs. Ceux-ci correspondent à des opérateurs différentiels reproduisant la transformation infinitésimale $x \mapsto x' = x + \varepsilon^\mu(x)$ directement sur les champs $\phi(x)$ comme $\phi(x') = \phi(x) + \varepsilon^\mu \partial_\mu \phi(x)$. Les générateurs de chaque type de transformations sont énumérés ci-dessous.

- les translations : $\varepsilon^\mu \partial_\mu = \alpha^\mu \partial_\mu \Rightarrow P_\mu = \partial_\mu$ avec $\alpha^\mu = \delta_\nu^\mu$ pour d degrés de liberté sur ν ;
- les dilatation : $\varepsilon^\mu \partial_\mu = \zeta x^\mu \partial_\mu \Rightarrow D = x^\mu \partial_\mu$ avec $\zeta = 1$ pour 1 degré de liberté ;
- les rotations : $\varepsilon^\mu \partial_\mu = \omega^\mu{}_\nu x^\nu \partial_\mu \Rightarrow M_{\mu\nu} = x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu$ avec $\omega^\mu{}_\nu = \delta_\rho^\mu \delta_\nu^\sigma - \delta_\sigma^\mu \delta_\nu^\rho$ pour $\frac{1}{2}d(d-1)$ degrés de liberté sur ρ et σ ;
- les transformations conformes spéciales : $\varepsilon^\mu \partial_\mu = 2(\xi \cdot x)x^\mu \partial_\mu - x^2\xi^\mu \partial_\mu \Rightarrow K_\mu = 2x_\mu(x \cdot \partial) - x^2 \partial_\mu$ avec $\xi^\mu = \delta_\nu^\mu$ pour d degrés de liberté sur ν .

3.2 Cas bidimensionnel

Dans la démarche de la dernière section, seul le cas $d = 2$ n'a pas été traité. En effet, pour ce cas une transformation de \mathbb{R}^2 à \mathbb{C} permet d'exhiber une structure conforme beaucoup plus riche qu'en dimension supérieure et que dans le cas unidimensionnel.

Soient ainsi (z^0, z^1) les deux coordonnées de l'espace-temps et $z^\mu \mapsto w^\mu(x)$ un changement de coordonnées. Sous cette transformation, le tenseur métrique contravariant devient

$$g^{\mu\nu} \mapsto \left(\frac{\partial w^\mu}{\partial z^\alpha} \right) \left(\frac{\partial w^\nu}{\partial z^\beta} \right) g^{\alpha\beta}$$

À partir d'ici, une hypothèse supplémentaire doit être faite : $g \equiv \text{diag}(+, +)$ est considéré euclidien. Ceci est appuyé par le fait que $g^{\mu\nu}$ constant peut être diagonalisé, puis normalisé. De plus, les seuls tenseurs non-dégénérés de ce type pour $d = 2$ sont $g = \text{diag}(+, +)$ et $g = \text{diag}(-, +)$. Toutefois, le changement de coordonnées $x^0 \mapsto ix^0$ permet de passer de $\text{diag}(-, +)$ à $\text{diag}(+, +)$. Bref, cette condition n'est absolument pas plus contraignante que l'hypothèse initiale. Par conséquent, l'équation 3.1 mène aux expressions suivantes.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial w^0}{\partial z^0} \right)^2 + \left(\frac{\partial w^0}{\partial z^1} \right)^2 &= \left(\frac{\partial w^1}{\partial z^0} \right)^2 + \left(\frac{\partial w^1}{\partial z^1} \right)^2 \\ \left(\frac{\partial w^0}{\partial z^0} \right) \left(\frac{\partial w^1}{\partial z^0} \right) + \left(\frac{\partial w^0}{\partial z^1} \right) \left(\frac{\partial w^1}{\partial z^1} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Ces conditions sont équivalentes à l'une des paires d'équations ci-contre.

$$\frac{\partial w^1}{\partial z^0} = \frac{\partial w^0}{\partial z^1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial w^0}{\partial z^0} = -\frac{\partial w^1}{\partial z^1} \quad (3.6)$$

ou

$$\frac{\partial w^1}{\partial z^0} = -\frac{\partial w^0}{\partial z^1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial w^0}{\partial z^0} = \frac{\partial w^1}{\partial z^1} \quad (3.7)$$

L'équation 3.6 n'est autre que les conditions de Cauchy-Riemann de fonctions holomorphes alors que l'équation 3.7 présente celles de fonctions antiholomorphes. Ainsi, une transformation est conforme si et seulement si elle est holomorphe ou antiholomorphe. Un changement de variables approprié, de \mathbb{R}^2 à \mathbb{C} , permet de mettre davantage en valeur ces propriétés.

$$\begin{aligned} z &= z^0 + iz^1 & z^0 &= \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \\ \bar{z} &= z^0 - iz^1 & z^1 &= \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \\ \partial &= \partial_z = \frac{1}{2}(\partial_0 - i\partial_1) & \partial_0 &= \partial + i\bar{\partial} \\ \bar{\partial} &= \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_0 + i\partial_1) & \partial_1 &= i(\partial - i\bar{\partial}) \end{aligned}$$

En opérant un changement de variables similaire à w^0 et w^1 , on obtient les formules ci-bas.

$$\begin{aligned} \partial_0(w^0 + iw^1) &= \partial_1(iw^0 - w^1) & \Rightarrow & \partial_0 w = i\partial_1 w & \Rightarrow & \partial w = 0 \\ \partial_0(w^0 - iw^1) &= \partial_1(-iw^0 - w^1) & \Rightarrow & \partial_0 \bar{w} = -i\partial_1 \bar{w} & \Rightarrow & \bar{\partial} \bar{w} = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \partial_0(w^0 - iw^1) &= \partial_1(iw^0 + w^1) & \Rightarrow & \partial_0 \bar{w} = i\partial_1 \bar{w} & \Rightarrow & \partial \bar{w} = 0 \\ \partial_0(w^0 + iw^1) &= \partial_1(-iw^0 + w^1) & \Rightarrow & \partial_0 w = -i\partial_1 w & \Rightarrow & \bar{\partial} w = 0 \end{aligned}$$

Malgré leur apparente différence, les équations 3.6 et 3.7 mènent aux mêmes équations à conjugaison complexe près ($w \leftrightarrow \bar{w}$). D'ailleurs, toute fonction analytique $w : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto w(z)$ est une transformation conforme puisqu'une fonction complexe est analytique si et seulement si elle est holomorphe ([8]).

L'énonciation des générateurs des transformations conformes bidimensionnelles⁵ (aussi dites *locales*) est maintenant entreprise. Considérons une transformation conforme infinitésimale.

$$z' = z + \varepsilon(z) \quad \text{où} \quad \varepsilon(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^{n+1} \quad \text{et} \quad \bar{z}' = \bar{z} + \bar{\varepsilon}(\bar{z}) \quad \text{où} \quad \bar{\varepsilon}(\bar{z}) = \sum_{-\infty}^{\infty} \bar{c}_n \bar{z}^{n+1}$$

où on suppose que $\varepsilon(z)$ et $\bar{\varepsilon}(\bar{z})$ admettent un développement en série de Laurent autour de $z = 0 = \bar{z}$.

5. On ne suppose pas les transformations nécessairement inversibles, mais simplement analytiques excepté en un nombre fini de points.

Soit $\phi(z, \bar{z})$ un champ, alors celui-ci se transforme de manière infinitésimale (développement au premier ordre) tel que,

$$\begin{aligned}\phi(z', \bar{z}') &= \phi(z, \bar{z}) - \varepsilon(z)\partial\phi(z, \bar{z}) - \bar{\varepsilon}(\bar{z})\bar{\partial}\phi(z, \bar{z}) \\ &\Rightarrow \delta\phi(z, \bar{z}) = -\varepsilon(z)\partial\phi(z, \bar{z}) - \bar{\varepsilon}(\bar{z})\bar{\partial}\phi(z, \bar{z}) = \sum_{-\infty}^{\infty} \left(c_n l_n \phi(z, \bar{z}) + \bar{c}_n \bar{l}_n \phi(z, \bar{z}) \right)\end{aligned}$$

où les opérateurs différentiels $l_n = -z^{n+1}\partial$ et $\bar{l}_n = -\bar{z}^{n+1}\bar{\partial}$ ont été introduits. D'ailleurs, les opérateurs l_n et \bar{l}_n sont les générateurs recherchés. Les règles de commutations sont simplement,

$$\begin{aligned}[l_m, l_n] &= z^{m+1}\partial(z^{n+1}\partial) - z^{n+1}\partial(z^{m+1}\partial) = (n+1)z^{m+n+1}\partial - (m+1)z^{m+n+1}\partial = (m-n)l_{m+n} \\ [\bar{l}_m, \bar{l}_n] &= \bar{z}^{m+1}\bar{\partial}(\bar{z}^{n+1}\bar{\partial}) - \bar{z}^{n+1}\bar{\partial}(\bar{z}^{m+1}\bar{\partial}) = (n+1)\bar{z}^{m+n+1}\bar{\partial} - (m+1)\bar{z}^{m+n+1}\bar{\partial} = (m-n)\bar{l}_{m+n} \\ [l_m, \bar{l}_n] &= z^{m+1}\partial(\bar{z}^{n+1}\bar{\partial}) - \bar{z}^{n+1}\bar{\partial}(z^{m+1}\partial) = 0\end{aligned}$$

Par conséquent, le groupe conforme est une \mathbb{C} -algèbre de Lie consistant en la somme directe de deux algèbres de Virasoro \mathfrak{Vir} de charge $c = 0$. Typiquement, cette algèbre de Lie est nommée algèbre de Witt.

Proposition 3.2. *Les opérateurs l_{-1} , \bar{l}_{-1} , l_0 , \bar{l}_0 , l_1 et \bar{l}_1 permettent de générer les transformations conformes pour $d > 2$. En effet, nous avons les identités suivantes.*

$$\begin{aligned}P_0 &= -(l_{-1} + i\bar{l}_{-1}) & D &= -(l_0 + i\bar{l}_0) & K_0 &= -(l_1 + i\bar{l}_1) \\ P_1 &= -(il_{-1} + \bar{l}_{-1}) & M_{01} &= -(il_0 + \bar{l}_0) & K_1 &= il_1 + \bar{l}_1\end{aligned}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}-(l_{-1} + i\bar{l}_{-1}) &= \partial + i\bar{\partial} = \partial_0 = P_0 \\ -(il_{-1} + \bar{l}_{-1}) &= i(\partial - i\bar{\partial}) = \partial_1 = P_1 \\ -(l_0 + i\bar{l}_0) &= z\partial + i\bar{z}\bar{\partial} = (z^0 + iz^1)\partial + i(z^0 - iz^1)\bar{\partial} = z^0(\partial + i\bar{\partial}) + iz^1(\partial - i\bar{\partial}) = z^0\partial_0 + z^1\partial_1 = D \\ -(il_0 + \bar{l}_0) &= iz\partial + \bar{z}\bar{\partial} = i(z^0 + iz^1)\partial + (z^0 - iz^1)\bar{\partial} = iz^0(\partial - i\bar{\partial}) - z^1(\partial + i\bar{\partial}) = z^0\partial_1 - z^1\partial_0 = M_{01} \\ -(l_1 + i\bar{l}_1) &= z^2\partial + i\bar{z}^2\bar{\partial} = (z^0 + iz^1)^2\partial + i(z^0 - iz^1)^2\bar{\partial} \\ &= (z^0)^2(\partial + i\bar{\partial}) + 2iz^0z^1(\partial - i\bar{\partial}) - (z^1)^2(\partial + i\bar{\partial}) = (z^0)^2\partial_0 + 2z^0z^1\partial_1 - (z^1)^2\partial_0 \\ &= 2z^0(z^0\partial_0 + z^1\partial_1) - ((z^0)^2 + (z^1)^2)\partial_0 = 2z_0(z^0\partial_0 + z^1\partial_1) - ((z^0)^2 + (z^1)^2)\partial_0 = K_0 \\ il_1 + \bar{l}_1 &= -iz^2\partial - \bar{z}^2\bar{\partial} = -i(z^0 + iz^1)^2\partial - (z^0 - iz^1)^2\bar{\partial} \\ &= -i(z^0)^2(\partial - i\bar{\partial}) + 2z^0z^1(\partial + i\bar{\partial}) + i(z^1)^2(\partial - i\bar{\partial}) = -(z^0)^2\partial_1 + 2z^0z^1\partial_0 + (z^1)^2\partial_1 \\ &= 2z^1(z^0\partial_0 + z^1\partial_1) - ((z^0)^2 + (z^1)^2)\partial_1 = 2z_1(z^0\partial_0 + z^1\partial_1) - ((z^0)^2 + (z^1)^2)\partial_1 = K_1\end{aligned}$$

Notons l'utilisation des identités $z^0 = z_0$ et $z^1 = z_1$ pour K_0 et K_1 . \square

4 Introduction au boson libre

Dans cette section, la théorie conforme du boson libre sans masse et sans spin est présentée. L'invariance conforme de l'action associée est aussi démontrée et les règles de quantification canonique ainsi que la notion d'ordre normal sont introduites. Les références utilisées ici sont [3], [7] et [8].

4.1 Boson libre classique

Après avoir fait un rappel sur les algèbres de Lie et avoir présenté les transformations conformes, il est temps d'attaquer la dynamique du boson libre. Cette particule est considérée sans masse et sans spin, n'est soumise à aucun potentiel et évolue dans un espace-temps bidimensionnel. De plus, l'espace-temps considéré est minkoskien⁶ et périodique en x , *i.e.* $x + L = x$ (c'est-à-dire qu'il s'agit d'un cylindre). Par conséquent, celle-ci est décrite par un champ scalaire φ satisfaisant l'équation de Dirac.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - m^2 \varphi^2 - V \varphi \right) = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi$$

6. La signature utilisée est $\text{diag}(-, +)$ avec t négatif

Par conséquent, l'action du boson libre est

$$\mathcal{S} = \frac{1}{g} \int_{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}} \mathcal{L} dx dt = \frac{1}{2g} \int_{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi dx dt$$

où g est une constante de couplage. Par le principe de moindre action, le champ φ extrémise l'action \mathcal{S} . Ce faisant, considérons une variation infinitésimale $\varphi' = \varphi + \delta\varphi$ nulle pour $t \rightarrow \pm\infty$ et périodique en x . L'action devient alors, en approximant au premier ordre,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}' &= \frac{1}{2g} \int_{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}} \partial_\mu \varphi' \partial^\mu \varphi' dx dt = \frac{1}{2g} \int_{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}} \partial_\mu (\varphi + \delta\varphi) \partial^\mu (\varphi + \delta\varphi) dx dt = \mathcal{S} + \frac{1}{g} \int_{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}} \partial_\mu (\delta\varphi) \partial^\mu \varphi dx dt \\ \Rightarrow \mathcal{S}' - \mathcal{S} &= \frac{1}{g} \int_{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}} \partial_\mu (\delta\varphi) \partial^\mu \varphi dx dt = \frac{1}{g} \int_{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}} \partial_\mu (\delta\varphi \partial^\mu \varphi) dx dt - \frac{1}{g} \int_{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}} \delta\varphi \partial_\mu \partial^\mu \varphi dx dt \\ &= \frac{1}{g} \int_{\mathbb{R}} [\delta\varphi \partial^t \varphi]_0^L dt + \frac{1}{g} \int_{\mathbb{S}^1} [\delta\varphi \partial^x \varphi]_{-\infty}^{\infty} dx - \frac{1}{g} \int_{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}} \delta\varphi \partial_\mu \partial^\mu \varphi dx dt \\ &= -\frac{1}{g} \int_{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}} \delta\varphi \partial_\mu \partial^\mu \varphi dx dt \equiv 0 \end{aligned}$$

Puisque $\delta\varphi$ est totalement arbitraire, outre les conditions frontières, φ satisfait le principe de moindre action si $\partial_\mu \partial^\mu \varphi = 0$, c'est-à-dire si $\partial_t^2 \varphi = \partial_x^2 \varphi$. Pour obtenir une théorie conforme, il est nécessaire d'effectuer un changement de variable permettant de passer de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{R}^2$ à \mathbb{C} . Mais préalablement, il faut que l'espace-temps considéré soit euclidien. Ceci s'avère possible suite à la rotation de Wick $t \mapsto \tau = -it$, où τ est considéré purement réel. Puis, le changement de variables suivant est effectué.

$$\left. \begin{aligned} z &= e^{2\pi(\tau+ix)/L} = e^{2\pi i(x-t)/L} \\ \bar{z} &= e^{2\pi(\tau-ix)/L} = e^{-2\pi i(x+t)/L} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \partial_t = (\partial_t z) \partial + (\partial_t \bar{z}) \bar{\partial} = -\frac{2\pi i}{L} (z \partial + \bar{z} \bar{\partial}) \\ \partial_x = (\partial_x z) \partial + (\partial_x \bar{z}) \bar{\partial} = \frac{2\pi i}{L} (z \partial - \bar{z} \bar{\partial}) \end{cases}$$

Ce faisant, l'équation du mouvement devient

$$\begin{aligned} \partial_t^2 &= -\frac{4\pi^2}{L^2} (z \partial + \bar{z} \bar{\partial})^2 = -\frac{4\pi^2}{L^2} (z^2 \partial^2 + 2z \bar{z} \partial \bar{\partial} + \bar{z}^2 \bar{\partial}^2) \\ \partial_x^2 &= -\frac{4\pi^2}{L^2} (z \partial - \bar{z} \bar{\partial})^2 = -\frac{4\pi^2}{L^2} (z^2 \partial^2 - 2z \bar{z} \partial \bar{\partial} + \bar{z}^2 \bar{\partial}^2) \\ \partial_t^2 \varphi &= \partial_x^2 \varphi \Rightarrow z \bar{z} \partial \bar{\partial} \varphi = -z \bar{z} \partial \bar{\partial} \varphi \Rightarrow z \bar{z} \partial \bar{\partial} \varphi = 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, en tout point excepté $z = \bar{z} = 0$, le champ φ doit satisfaire l'équation $\partial \bar{\partial} \varphi = 0$. Ceci est totalement équivalent à dire que $\partial \varphi = \partial \varphi(z)$ est holomorphe et $\bar{\partial} \varphi = \bar{\partial} \varphi(\bar{z})$ est antiholomorphe. Sous ce changement de variables, l'action du boson libre devient,

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \frac{1}{2g} \int_{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi dx dt = \frac{1}{2g} \int_{\mathbb{C}} \left[\frac{4\pi^2}{L^2} (z \partial \varphi + \bar{z} \bar{\partial} \varphi)^2 - \frac{4\pi^2}{L^2} (z \partial \varphi - \bar{z} \bar{\partial} \varphi)^2 \right] \left| \frac{D(t, x)}{D(z, \bar{z})} \right| dz d\bar{z} \\ &= \frac{1}{2g} \frac{4\pi^2}{L^2} \int_{\mathbb{C}} \left[4z \bar{z} \partial \varphi \bar{\partial} \varphi \right] \left| \frac{\partial t}{\partial z} \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial z}{\partial \bar{z}} \frac{\partial x}{\partial z} \right| dz d\bar{z} = \frac{1}{2g} \frac{16\pi^2}{L^2} \int_{\mathbb{C}} z \bar{z} \partial \varphi \bar{\partial} \varphi \left| \frac{iL}{4\pi z} \frac{iL}{4\pi \bar{z}} - \frac{iL}{4\pi \bar{z}} \frac{-iL}{4\pi z} \right| dz d\bar{z} \\ &= \frac{1}{g} \int_{\mathbb{C}} \partial \varphi \bar{\partial} \varphi dz d\bar{z} \end{aligned}$$

Quoique le champ du boson libre évolue dans \mathbb{C} , il reste à montrer que celui-ci est invariant sous transformations conformes. Ainsi, considérons une transformation conforme infinitésimale holomorphe en z et antiholomorphe en \bar{z} .

$$z' = z + \varepsilon(z) \Rightarrow \begin{cases} \partial' = (1 - \partial \varepsilon) \partial \\ dz' = (1 + \partial \varepsilon) dz \end{cases} \quad \text{et} \quad \bar{z}' = \bar{z} + \bar{\varepsilon}(\bar{z}) \Rightarrow \begin{cases} \bar{\partial}' = (1 - \bar{\partial} \bar{\varepsilon}) \bar{\partial} \\ d\bar{z}' = (1 + \bar{\partial} \bar{\varepsilon}) d\bar{z} \end{cases}$$

Alors, en approximant au premier ordre en $\partial \varepsilon$ et $\bar{\partial} \bar{\varepsilon}$, l'action \mathcal{S} demeure invariante

$$\begin{aligned} \mathcal{S}' &= \frac{1}{g} \int_{\mathbb{C}} \partial' \varphi'(z', \bar{z}') \bar{\partial}' \varphi'(z', \bar{z}') dz' d\bar{z}' = \frac{1}{g} \int_{\mathbb{C}} (1 - \partial \varepsilon) \partial \varphi(z, \bar{z}) (1 - \bar{\partial} \bar{\varepsilon}) \bar{\partial} \varphi(z, \bar{z}) (1 + \partial \varepsilon) dz (1 + \bar{\partial} \bar{\varepsilon}) d\bar{z} \\ &= \frac{1}{g} \int_{\mathbb{C}} (1 + \partial \varepsilon - \partial \varepsilon + \bar{\partial} \bar{\varepsilon} - \bar{\partial} \bar{\varepsilon}) \partial \varphi(z, \bar{z}) \bar{\partial} \varphi(z, \bar{z}) dz d\bar{z} = \frac{1}{g} \int_{\mathbb{C}} \partial \varphi(z, \bar{z}) \bar{\partial} \varphi(z, \bar{z}) dz d\bar{z} = \mathcal{S} \end{aligned}$$

L'identité $\varphi'(z', \bar{z}') = \varphi(z, \bar{z})$ est justifiée par le fait que le champ du boson ne doit pas dépendre du système de coordonnées utilisé.

Ainsi, le boson libre est bel et bien une théorie admettant le groupe conforme comme groupe de symétrie puisque son action est inchangée sous transformation conforme. Toutefois, il est à noter que \mathcal{S} n'est pas invariante si la transformation considérée n'est ni holomorphe en z , ni antiholomorphe en \bar{z} . En effet,

$$z' = z + \varepsilon(z, \bar{z}) \Rightarrow \begin{cases} \partial' = (1 - \partial\varepsilon)\partial - \partial\bar{\varepsilon}\bar{\partial} \\ dz' = (1 + \partial\varepsilon)dz + \bar{\partial}\varepsilon d\bar{z} \end{cases} \quad \text{et} \quad \bar{z}' = \bar{z} + \bar{\varepsilon}(z, \bar{z}) \Rightarrow \begin{cases} \bar{\partial}' = -\bar{\partial}\varepsilon\partial + (1 - \bar{\partial}\bar{\varepsilon})\bar{\partial} \\ d\bar{z}' = \partial\bar{\varepsilon}dz + (1 + \bar{\partial}\bar{\varepsilon})d\bar{z} \end{cases}$$

Lorsque approximée au premier ordre en $\partial\varepsilon$, $\bar{\partial}\varepsilon$, $\partial\bar{\varepsilon}$ et $\bar{\partial}\bar{\varepsilon}$, l'action du boson libre devient alors

$$\begin{aligned} \mathcal{S}' &= \frac{1}{g} \int_{\mathbb{C}} \partial' \varphi'(z', \bar{z}') \bar{\partial}' \varphi'(z', \bar{z}') dz' d\bar{z}' \\ &= \frac{1}{g} \int_{\mathbb{C}} \left[(1 - \partial\varepsilon)\partial\varphi - \partial\bar{\varepsilon}\bar{\partial}\varphi \right] \left[-\bar{\partial}\varepsilon\partial\varphi + (1 - \bar{\partial}\bar{\varepsilon})\bar{\partial}\varphi \right] \left[(1 + \partial\varepsilon)dz + \bar{\partial}\varepsilon d\bar{z} \right] \left[\partial\bar{\varepsilon}dz + (1 + \bar{\partial}\bar{\varepsilon})d\bar{z} \right] \\ &= \frac{1}{g} \int_{\mathbb{C}} \left[(1 + \partial\varepsilon - \partial\varepsilon + \bar{\partial}\bar{\varepsilon} - \bar{\partial}\bar{\varepsilon})\partial\varphi\bar{\partial}\varphi - \bar{\partial}\varepsilon\partial\varphi\partial\varphi - \partial\bar{\varepsilon}\bar{\partial}\varphi\bar{\partial}\varphi \right] dz d\bar{z} \\ &= \mathcal{S} - \frac{1}{g} \int_{\mathbb{C}} \left[\bar{\partial}\varepsilon\partial\varphi\partial\varphi + \partial\bar{\varepsilon}\bar{\partial}\varphi\bar{\partial}\varphi \right] dz d\bar{z} \neq \mathcal{S} \end{aligned}$$

Une dernière quantité classique peut être étudiée, soit le tenseur énergie-impulsion du boson libre. Classiquement, en considérant une transformation infinitésimale arbitraire $x'^{\mu} = x^{\mu} + \eta^{\mu}$, le tenseur énergie-impulsion est défini par la formule suivante.

$$\mathcal{S}' - \mathcal{S} = \int_{\mathcal{E}} T^{\mu\nu} \partial_{\mu} \eta_{\nu} d^n z$$

Dans le cas présent, $\mathcal{E} = \mathbb{C}$ et $n = 2$. Aussi en considérant la transformation infinitésimale arbitraire du dernier calcul, soit $\eta_z = \varepsilon(z, \bar{z})$ et $\eta_{\bar{z}} = \bar{\varepsilon}(z, \bar{z})$, on obtient

$$\mathcal{S}' - \mathcal{S} = \int_{\mathbb{C}} \left[T^{zz} \partial\varepsilon + T^{\bar{z}\bar{z}} \bar{\partial}\bar{\varepsilon} + T^{z\bar{z}} \partial\bar{\varepsilon} + T^{\bar{z}z} \bar{\partial}\varepsilon \right] dz d\bar{z} = -\frac{1}{g} \int_{\mathbb{C}} \left[\bar{\partial}\varepsilon\partial\varphi\partial\varphi + \partial\bar{\varepsilon}\bar{\partial}\varphi\bar{\partial}\varphi \right] dz d\bar{z}$$

En faisant les associations appropriées, on en tire que

$$T^{zz} = 0 \quad T^{\bar{z}\bar{z}} = -\frac{1}{g} \partial\varphi\partial\varphi \quad T^{z\bar{z}} = -\frac{1}{g} \bar{\partial}\varphi\bar{\partial}\varphi \quad T^{\bar{z}z} = 0$$

Puisque $\partial\varphi$ est holomorphe et que $\bar{\partial}\varphi$ est antiholomorphe, on a que $T^{\bar{z}\bar{z}}$ est holomorphe et $T^{z\bar{z}}$ est antiholomorphe. On définit alors les deux quantités suivantes en vue d'une utilisation future.

$$T(z) = -\frac{g}{2} T^{\bar{z}\bar{z}} = \frac{1}{2} \partial\varphi(z) \partial\varphi(z) \quad \bar{T}(\bar{z}) = -\frac{g}{2} T^{z\bar{z}} = \frac{1}{2} \bar{\partial}\varphi(\bar{z}) \bar{\partial}\varphi(\bar{z})$$

4.2 Quantification canonique

Puisque le boson libre évolue sur un cylindre $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ de circonférence L , le champ φ peut être développé en série de Fourier.

$$\varphi(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi_n(t) e^{2\pi i n x / L} \quad \text{avec} \quad \varphi_n(t) = \frac{1}{L} \int_{\mathbb{S}^1} e^{-2\pi i n x / L} \varphi(x, t) dx$$

Selon cette décomposition, l'action devient

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \frac{1}{2g} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^L \left[-(\partial_t \varphi)^2 + (\partial_x \varphi)^2 \right] dx dt \\ &= \frac{1}{2g} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^L \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \left[-\dot{\varphi}_m(t) \dot{\varphi}_n(t) e^{2\pi i (m+n)x/L} - \frac{4\pi^2 mn}{L^2} \varphi_m(t) \varphi_n(t) e^{2\pi i (m+n)x/L} \right] dx dt \\ &= -\frac{1}{2g} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \left[\dot{\varphi}_m(t) \dot{\varphi}_n(t) + \frac{4\pi^2 mn}{L^2} \varphi_m(t) \varphi_n(t) \right] \int_0^L e^{2\pi i (m+n)x/L} dx dt \\ &= -\frac{1}{2g} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \left[\dot{\varphi}_m(t) \dot{\varphi}_n(t) + \frac{4\pi^2 mn}{L^2} \varphi_m(t) \varphi_n(t) \right] L \delta_{m+n=0} dt \\ &= -\frac{L}{2g} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[\dot{\varphi}_n(t) \dot{\varphi}_{-n}(t) - \frac{4\pi^2 n^2}{L^2} \varphi_n(t) \varphi_{-n}(t) \right] dt \end{aligned}$$

La dernière équation est celle de l'action en mécanique analytique, soit l'intégrale par rapport au temps du lagrangien du système. Les équations canoniques de Hamilton permettent donc de définir les moments généralisés $\pi_n(t)$.

$$\pi_n(t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_n} = -\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}_n} \frac{L}{2g} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left[\dot{\varphi}_m(t) \dot{\varphi}_{-m}(t) - \frac{4\pi^2 m^2}{L^2} \varphi_m(t) \varphi_{-m}(t) \right] = -\frac{L}{g} \dot{\varphi}_{-n}(t)$$

La quantification canonique consiste à considérer les $\varphi_n(t)$ et $\pi_n(t)$ comme des opérateurs satisfaisant les règle de commutations suivantes.

$$[\varphi_m(t), \varphi_n(t)] = 0 \quad [\varphi_m(t), \pi_n(t)] = i\hbar \delta_{m=n} \quad [\pi_m(t), \pi_n(t)] = 0$$

Pour la suite du document, nous considérerons que $\hbar = 1$. Ce faisant, la seconde règle de commutation devient,

$$[\varphi_m(t), \dot{\varphi}_n(t)] = \frac{ig}{L} \delta_{m+n=0}$$

où g est redéfini par $-g$ par soucis de simplicité. Il est à noter que cette quantification a été effectuée pour les variables x et t . Toutefois, les variables d'intérêt sont z et \bar{z} . Pour y parvenir, il suffit de décomposer les champs $\partial\varphi(z)$ et $\bar{\partial}\varphi(\bar{z})$ en série de Laurent autour de $z = \bar{z} = 0$. Notons que cette décomposition est possible car $\partial\varphi(z)$ et $\bar{\partial}\varphi(\bar{z})$ sont respectivement analytique et antianalytique.

$$\partial\varphi(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^{-n-1} \quad \bar{\partial}\varphi(\bar{z}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{a}_n \bar{z}^{-n-1}$$

Par le théorème des résidus de Cauchy (voir l'annexe C.2), nous avons que

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_0 \partial\varphi z^n dz \quad \bar{a}_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_0 \bar{\partial}\varphi \bar{z}^n d\bar{z}$$

où l'indice 0 sous l'intégrale réfère à un contour d'intégration autour de l'origine parcouru dans le sens anti-horaire. Avec la paramétrisation $z = e^{2\pi i(t-x)/L} = e^{2\pi\tau/L} e^{-2\pi ix/L}$ et $\bar{z} = e^{2\pi i(t+x)/L} = e^{2\pi\tau/L} e^{2\pi ix/L}$ pour $x, \tau \in \mathbb{R}$, le parcours d'intégration peut être pris à τ constant, donc t constant. Par conséquent, les coefficients de Fourier sont

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_0 \partial\varphi z^n dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^L \left(\frac{\partial t}{\partial z} \partial_t \varphi + \frac{\partial x}{\partial z} \partial_x \varphi \right) e^{2\pi i n(x-t)/L} \frac{\partial z}{\partial x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^L \left(-\frac{L}{4\pi i} \frac{1}{z} \partial_t \varphi + \frac{L}{4\pi i} \frac{1}{z} \partial_x \varphi \right) e^{2\pi i n(x-t)/L} \frac{2\pi i}{L} z dx = \frac{1}{4\pi i} \int_0^L (-\partial_t \varphi + \partial_x \varphi) e^{2\pi i n(x-t)/L} dx \\ &= \frac{1}{4\pi i} \int_0^L \left(-\sum_{m \in \mathbb{Z}} \dot{\varphi}_m(t) e^{2\pi i m x/L} + \sum_{m \in \mathbb{Z}} \varphi_m(t) \frac{2\pi i m}{L} e^{2\pi i m x/L} \right) e^{2\pi i n(x-t)/L} dx \\ &= \frac{1}{4\pi i} e^{-2\pi i n t/L} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(-\dot{\varphi}_m(t) + \varphi_m(t) \frac{2\pi i m}{L} \right) \int_0^L e^{2\pi i(m+n)x/L} dx \\ &= \frac{1}{4\pi i} e^{-2\pi i n t/L} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(-\dot{\varphi}_m(t) + \varphi_m(t) \frac{2\pi i m}{L} \right) L \delta_{m=n} = -\left(\frac{n}{2} \varphi_{-n}(t) + \frac{L}{4\pi i} \dot{\varphi}_{-n}(t) \right) e^{-2\pi i n t/L} \\ \bar{a}_n &\equiv \left(\frac{n}{2} \varphi_n(t) + \frac{L}{4\pi i} \dot{\varphi}_n(t) \right) e^{-2\pi i n t/L} \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} [a_m, a_n] &= \left[-\left(\frac{m}{2} \varphi_{-m}(t) + \frac{L}{4\pi i} \dot{\varphi}_{-m}(t) \right) e^{-2\pi i m t/L}, -\left(\frac{n}{2} \varphi_{-n}(t) + \frac{L}{4\pi i} \dot{\varphi}_{-n}(t) \right) e^{-2\pi i n t/L} \right] \\ &= e^{-2\pi i(m+n)t/L} \left(\frac{mL}{8\pi i} [\varphi_{-m}(t), \dot{\varphi}_{-n}(t)] + \frac{nL}{8\pi i} [\dot{\varphi}_{-m}(t), \varphi_{-n}(t)] \right) \\ &= \frac{L}{8\pi i} e^{-2\pi i(m+n)t/L} \left(\frac{igm}{L} \delta_{m+n=0} - \frac{ign}{L} \delta_{m+n=0} \right) = \frac{gm}{4\pi} \delta_{m+n=0} \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} [a_m, \bar{a}_n] &= \left[-\left(\frac{m}{2} \varphi_{-m}(t) + \frac{L}{4\pi i} \dot{\varphi}_{-m}(t) \right) e^{-2\pi i m t/L}, \left(\frac{n}{2} \varphi_n(t) + \frac{L}{4\pi i} \dot{\varphi}_n(t) \right) e^{-2\pi i n t/L} \right] \\ &= -e^{-2\pi i(m+n)t/L} \left(\frac{mL}{8\pi i} [\varphi_{-m}(t), \dot{\varphi}_n(t)] + \frac{nL}{8\pi i} [\dot{\varphi}_{-m}(t), \varphi_n(t)] \right) \\ &= -\frac{L}{8\pi i} e^{-2\pi i(m+n)t/L} \left(\frac{igm}{L} \delta_{m=n} - \frac{ign}{L} \delta_{m=n} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

et,

$$\begin{aligned}
[\bar{a}_m, \bar{a}_n] &= \left[\left(\frac{m}{2} \varphi_m(t) + \frac{L}{4\pi i} \dot{\varphi}_m(t) \right) e^{-2\pi i m t / L}, \left(\frac{n}{2} \varphi_n(t) + \frac{L}{4\pi i} \dot{\varphi}_n(t) \right) e^{-2\pi i n t / L} \right] \\
&= e^{-2\pi i (m+n)t/L} \left(\frac{mL}{8\pi i} [\varphi_m(t), \dot{\varphi}_n(t)] + \frac{nL}{8\pi i} [\dot{\varphi}_m(t), \varphi_n(t)] \right) \\
&= \frac{L}{8\pi i} e^{-2\pi i (m+n)t/L} \left(\frac{igm}{L} \delta_{m+n=0} - \frac{ign}{L} \delta_{m+n=0} \right) = \frac{gm}{4\pi} \delta_{m+n=0}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

On reconnaît d'ailleurs que $\{\bar{a}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ et $\{\bar{a}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sont tous deux une copie de l'algèbre de Lie $\hat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$, introduite à la section 2.4.2, si on pose $g = 4\pi$. L'algèbre de symétrie du boson libre est donc $\hat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$ et la théorie conforme de ce boson se déroule donc sur une somme directe de $\hat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$ -modules de Verma.

4.3 Ordre normal

La quantification de la théorie classique du boson libre sera complète lorsque le tenseur énergie-impulsion aura été lui aussi quantifié. En partant des précédents résultats, le tenseur holomorphe devient,

$$T(z) = \frac{1}{2} \partial \varphi \partial \varphi = \frac{1}{2} \sum_{r \in \mathbb{Z}} \sum_{s \in \mathbb{Z}} a_r a_s z^{-r-s-2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[\sum_{r \in \mathbb{Z}} a_r a_{n-r} \right] z^{-n-2} \equiv \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$$

À proprement parler, le produit $a_n a_m$ n'existe pas dans $\hat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$. Toutefois, en considérant que $\hat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$ agit sur un de ses modules de Verma, le produit est implicitement considéré du point de vue de cette action (i.e. $a_n a_m$ est vu comme opérateur agissant sur un vecteur $|\psi\rangle$). Afin que $T(z)$ soit bien défini, il faut absolument que les opérateurs L_n soient convergents. *A priori*, cela n'est pas le cas. En effet, si $|\psi\rangle$ est un vecteur quelconque du $\hat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$ -module de Verma V_λ ,

$$\begin{aligned}
L_0 |\psi\rangle &= \sum_{r \in \mathbb{Z}} a_r a_{-r} |\psi\rangle = \sum_{r > 0} a_{-r} a_r |\psi\rangle + a_0 a_0 |\psi\rangle + \sum_{r > 0} a_r a_{-r} |\psi\rangle \\
&= \sum_{r > 0} [a_{-r}, a_r] |\psi\rangle + a_0 a_0 |\psi\rangle + 2 \sum_{r > 0} a_r a_{-r} |\psi\rangle = \sum_{r > 0} r |\psi\rangle + a_0 a_0 |\psi\rangle + 2 \sum_{r > 0} a_r a_{-r} |\psi\rangle
\end{aligned}$$

et cette action n'est clairement pas convergente car $\sum_{r > 0} r = \infty$. Néanmoins, cette problématique de convergence peut être réglée en ordonnant adéquatement les termes a_n apparaissant dans les modes L_n . Pour ce faire, on définit un ordre canonique, appelé *ordre normal*, comme

$$: a_m a_n : = \begin{cases} a_m a_n & \text{si } m < 0 \\ a_n a_m & \text{autrement} \end{cases}$$

Cet ordre est noté par la présence de deux-points et une de ses propriétés est qu'il est commutatif. En effet,

Proposition 4.1. $\forall m, n \in \mathbb{Z}, : a_m a_n : = : a_n a_m :.$ Ainsi, $: \partial \varphi(z) \partial \varphi(w) : = : \partial \varphi(w) \partial \varphi(z) :$

Démonstration. Supposons que $m \neq -n$, alors $[a_m, a_n] = 0$. Ce faisant, l'ordre dans lequel a_m et a_n sont placés n'a aucune importance. En effet, on retient les trois cas suivants.

1. $m, n < 0 \Rightarrow : a_m a_n : = a_m a_n = a_n a_m = : a_n a_m :$
2. $m < 0, n \geq 0 \Rightarrow : a_m a_n : = a_m a_n = : a_n a_m :$
3. $m, n \geq 0 \Rightarrow : a_m a_n : = a_n a_m = a_m a_n = : a_n a_m :$

Supposons que $m = -n \neq 0$. Alors, sans perte de généralité, $n < 0$ et $: a_m a_n : = a_n a_m = : a_n a_m :.$ Si $m = -n = 0$, alors $: a_m a_n : = a_n a_m = a_0 a_0 = a_m a_n = : a_n a_m :.$ On en conclut alors que $\forall m, n \in \mathbb{Z}, : a_m a_n : = : a_n a_m :.$ L'expression pour les champs holomorphes est alors,

$$: \partial \varphi(z) \partial \varphi(w) : = \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} : a_m a_n : z^{-m-1} w^{-n-1} = \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} : a_n a_m : z^{-m-1} w^{-n-1} = : \partial \varphi(w) \partial \varphi(z) :$$

□

De toute évidence, l'ordre normal est seulement non-trivial pour L_0 étant donné l'équation 4.1. Néanmoins, il sera primordial de le respecter afin d'éviter toute divergence au sein des calculs.

Sous l'ordre normal, les opérateurs L_n s'écrivent

$$L_n = \frac{1}{2} \sum_{r \in \mathbb{Z}} : a_r a_{n-r} : = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{r \in \mathbb{Z}} a_r a_{n-r} & \text{si } n \neq 0 \\ \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{r>0} a_{-r} a_r & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Dans ce cas, la divergence établie à la page précédente disparaît étant donné que, pour $|\psi\rangle \in V_\lambda$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$L_n |\psi\rangle = \frac{1}{2} \sum_{r \in \mathbb{Z}} : a_r a_{n-r} : |\psi\rangle = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{r \leq -1} a_r a_{n-r} |\psi\rangle + \sum_{r \geq 0} a_{n-r} a_r |\psi\rangle \right\}$$

et les deux sommations sont finies puisque $a_{n-r} |\psi\rangle = 0$ pour un assez petit $r \leq -1$ et $a_r |\psi\rangle = 0$ pour un assez grand $r \geq 0$. En effet, puisque $|\psi\rangle \in V_\lambda$, cet état s'exprime comme une combinaison linéaire finie d'éléments de la base E_λ (voir section 2.4.2) et il n'y a qu'à utiliser la proposition 2.3 pour les annihiler.

Par ailleurs, l'ordre normal permet le calcul de la relation de commutation entre les opérateurs a_n et L_m .

Proposition 4.2. $\forall m, n \in \mathbb{Z} [L_m, a_n] = -a_{m+n}$

Démonstration. Supposons que $m \neq 0$.

$$\begin{aligned} [L_m, a_n] &= \frac{1}{2} \sum_{r \in \mathbb{Z}} [a_r a_{m-r}, a_n] = \frac{1}{2} \sum_{r \in \mathbb{Z}} (a_r [a_{m-r}, a_n] + [a_r, a_n] a_{m-r}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{r \in \mathbb{Z}} ((m-r) a_r \delta_{m-r+n=0} + r a_{m-r} \delta_{r+n=0}) = \frac{1}{2} (-n a_{m+n} - n a_{m+n}) = -n a_{m+n} \end{aligned}$$

Supposons que $m = 0$.

$$[L_0, a_n] = \frac{1}{2} [a_0 a_0, a_n] + \sum_{r>0} [a_{-r} a_r, a_n] = \sum_{r>0} (a_{-r} [a_r, a_n] + [a_{-r}, a_n] a_r) = \sum_{r>0} (r a_{-r} \delta_{r+n=0} - r a_r \delta_{r=n})$$

Dans ce cas, il y a trois possibilités. Si $n > 0$, alors $[L_0, a_n] = -r a_r \delta_{r=n} = -n a_n$. Si $n < 0$, alors $[L_0, a_n] = r a_{-r} \delta_{r+n=0} = -n a_n$. Finalement, si $n = 0$, alors $-r a_r \delta_{r=n} = 0 = 0 a_0$. Ainsi, $\forall m, n \in \mathbb{Z} [L_m, a_n] = -a_{m+n}$. \square

On en déduit alors la règle de commutation généralisée suivante.

Proposition 4.3. $\forall m, n, r \in \mathbb{N}, [L_m, a_n^r] = -2^{r-1} n a_n^{r-1} a_{n+m}$

Démonstration. On procède par induction sur l'exposant r . Le cas $r = 1$ a été prouvé à la proposition précédente. Supposons alors que l'identité ci-haut est valide pour un certain $r \in \mathbb{N}$. Par la règle de Leibniz, nous avons l'expression suivante.

$$[L_m, a_n^{r+1}] = a_n [L_m, a_n^r] + [L_m, a_n^r] a_n = -2^{r-1} n a_n^r a_{n+m} - 2^{r-1} n a_n^r a_{n+m} = -2^{(r+1)-1} n a_n^{(r+1)-1} a_{n+m}$$

Proposition 4.4. Si $|\lambda\rangle$ est un état de plus haut poids du $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$ -module de Verma V_λ , alors on a $L_0 |\lambda\rangle = \frac{1}{2} \lambda^2 |\lambda\rangle$. Aussi, sur tout $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$ -module de Verma, $\text{spec } L_0 \subseteq \mathbb{R}$.

Démonstration. D'abord, $L_0 |\lambda\rangle = \frac{1}{2} a_0 a_0 |\lambda\rangle + \sum_{r>0} a_{-r} a_r |\lambda\rangle = \frac{1}{2} \lambda^2 |\lambda\rangle$. Par ailleurs, selon les résultats de la section 2.4.2, les états de la base E_λ s'écrivent comme $\cdots a_{-3}^{j_3} a_{-2}^{j_2} a_{-1}^{j_1} |\lambda\rangle$, où $\forall k \in \mathbb{N}, j_k \geq 0$ et où l'ensemble $\{j_k | \forall k \in \mathbb{N}, j_k \neq 0\}$ est de cardinalité finie. Considérons d'abord l'action de L_0 sur ces états.

$$\begin{aligned} L_0 \cdots a_{-3}^{j_3} a_{-2}^{j_2} a_{-1}^{j_1} |\lambda\rangle &\stackrel{1}{=} L_0 a_{-n_1}^{j_{n_1}} \cdots a_{-n_r}^{j_{n_r}} |\lambda\rangle = \sum_{i=1}^r a_{-n_1}^{j_{n_1}} \cdots [L_0, a_{-n_i}^{j_{n_i}}] \cdots a_{-n_r}^{j_{n_r}} |\lambda\rangle - a_{-n_1}^{j_{n_1}} \cdots a_{-n_r}^{j_{n_r}} L_0 |\lambda\rangle \\ &\stackrel{2}{=} - \sum_{i=1}^r 2^{j_{n_i}-1} n_i a_{-n_1}^{j_{n_1}} \cdots a_{-n_i}^{j_{n_i}} \cdots a_{-n_r}^{j_{n_r}} |\lambda\rangle - \frac{1}{2} \lambda^2 a_{-n_1}^{j_{n_1}} \cdots a_{-n_r}^{j_{n_r}} |\lambda\rangle \\ &= \left[- \sum_{i=1}^r 2^{j_{n_i}-1} n_i - \frac{1}{2} \lambda^2 \right] a_{-n_1}^{j_{n_1}} \cdots a_{-n_r}^{j_{n_r}} |\lambda\rangle \end{aligned}$$

où, à l'égalité 1, le fait que les états de base sont un produit fini des a_{-n} agissant sur $|\psi\rangle$ a été utilisé et où l'égalité 2 correspond à la proposition 4.3. De toute évidence, les états de base de V_λ ont tous une valeur propre réelle. Ainsi, puisque que tout état $|\psi\rangle \in V_\lambda$ se décompose en une combinaison \mathbb{C} -linéaire des états de base ci-haut, un état propre de L_0 aura nécessairement une valeur propre réelle. \square

Bref, la quantification de $T(z)$ s'effectue en imposant l'ordre normal. De manière tout à fait similaire, $\bar{T}(\bar{z})$ peut être lui aussi quantifié

$$T(z) = \frac{1}{2} : \partial\varphi\partial\varphi := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[\sum_{r \in \mathbb{Z}} : a_r a_{n-r} : \right] z^{-n-2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[\sum_{r < 0} a_r a_{n-r} + \sum_{r \geq 0} a_r a_{n-r} \right] z^{-n-2}$$

$$\bar{T}(\bar{z}) = \frac{1}{2} : \bar{\partial}\varphi\bar{\partial}\varphi := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[\sum_{r \in \mathbb{Z}} : \bar{a}_r \bar{a}_{n-r} : \right] \bar{z}^{-n-2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[\sum_{r < 0} \bar{a}_r \bar{a}_{n-r} + \sum_{r \geq 0} \bar{a}_r \bar{a}_{n-r} \right] \bar{z}^{-n-2}$$

et c'est ce qui conclut l'introduction de la théorie du boson libre.

Pour plusieurs théoriciens (cf. [3], [7]), une théorie des champs bidimensionnelle est dite *conforme* lorsqu'elle admet une représentation de l'algèbre de Virasoro \mathfrak{Vir} . Selon cette caractérisation, il n'est pas clair que la théorie du boson libre conforme puisque son algèbre de symétrie est plutôt $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$. Or, comme il sera démontré à la section 5.4, les modes L_n ont comme relation de commutation

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{1}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n=0};$$

ce qui correspond exactement au crochet de Lie de l'algèbre \mathfrak{Vir} avec charge centrale $c = 1$. Ainsi, les algèbres \mathfrak{Vir} et $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$ cohabitent sur les $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$ -modules de Verma sous-jacents à la théorie du boson libre et cette dernière peut certainement être traitée dans le cas de la théorie conforme des champs. Il en va de même pour le secteur antiholomorphe $\{\bar{L}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ issu du tenseur $\bar{T}(\bar{z})$ et, plus rigoureusement, le boson libre se décompose comme un produit tensoriel de \mathfrak{Vir} -modules. Pour la suite du document, l'emphase sera mise sur les modes L_n et les copies \bar{L}_n seront délaissées pour plus de clarté. Or, ce léger manque de rigueur n'est pas vraiment répréhensible. En effet, les secteurs holomorphe (i.e. $\{L_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$) et antiholomorphe sont indépendants⁷ et les calculs effectués dans l'un de ces secteurs sont exactement reproductibles pour l'autre.

Avant d'aller plus en détail dans la théorie du boson libre, une réflexion quant à la charge centrale mérite d'être présentée. Précédemment, à la section 3.2, il a été montré que l'algèbre de Virasoro pour les transformations conformes bidimensionnelles possède une charge centrale nulle. Toutefois, à la vue de ce qui vient d'être exposé, il semble que l'algèbre conforme du boson libre soit caractérisée par $c = 1$. A priori, une incohérence semble ne pas avoir été démasquée, mais il n'en est rien. En effet, la différence réside dans le fait que certaines manipulations mathématiques⁸, qui ont été passées sous silence et qui ne seront pas abordées⁹, permettent de justifier l'apparition d'une anomalie conforme (charge centrale non nulle). Bref, la quantification qui a été effectuée sur les champs $\partial\varphi$ et $\bar{\partial}\varphi$ est totalement valide et aucune contradiction n'est à soulever.

7. Il s'agit d'un produit tensoriel. L'équation 4.2 vient aussi confirmer cette affirmation.

8. Il est ici question d'extension centrale d'algèbre de Lie et de représentation projective.

9. le lecteur intéressé est redirigé vers [4]

5 Résolution du boson libre

Dans cette section, la théorie du boson libre sans masse et sans spin est explicitement résolue. Les références utilisées sont [3], [9], [10], [11], [7] et [8].

5.1 Correspondance état-champ

Ce qui élève, aux yeux de plusieurs théoriciens ([3], [11]), la théorie conforme des champs au-dessus de l'étude de la théorie de la représentation de l'algèbre de Virasoro est la correspondance état-champ qui associe à chaque champ de la théorie un état du module de Verma sous-jacent (et vice-versa). Cette association bijective¹⁰ est ici présentée dans une seule direction, mais le lecteur intéressé peut se référer aux ouvrages plus mathématiques comme [11] pour la direction réciproque.

Définition 5.1 (Correspondance état-champ). L'état $|\psi\rangle$ correspondant à un champ $\psi(z)$ est défini comme

$$|\psi\rangle = \lim_{z \rightarrow 0} \psi(z) |0\rangle \quad (5.1)$$

Par exemple, pour le champ holomorphe $\partial\varphi(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^{-n-1}$, l'état correspondant est

$$|\partial\varphi\rangle = \lim_{z \rightarrow 0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n |0\rangle z^{-n-1} \stackrel{2}{=} \lim_{z \rightarrow 0} \sum_{n \leq -1} a_n |0\rangle z^{-n-1} = \sum_{n \leq -1} a_n |0\rangle \lim_{z \rightarrow 0} z^{-n-1} = a_{-1} |0\rangle$$

où l'égalité 2 vient du fait que, $\forall n \geq 0$, $a_n |0\rangle = 0$.

Pour $T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$, il faut travailler davantage. D'abord, si $n \geq 1$ ou si $n = -1$, alors

$$L_n |0\rangle = \frac{1}{2} \sum_{r \in \mathbb{Z}} a_r a_{n-r} |0\rangle = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{r \leq -1} a_r a_{n-r} |0\rangle + \sum_{r \geq 0} a_{n-r} a_r |0\rangle \right\} = 0$$

Ainsi, puisque $L_0 |0\rangle = \frac{1}{2} 0^2 |0\rangle = 0$ (voir prop. 4.4), on a

$$\begin{aligned} |T\rangle &= \lim_{z \rightarrow 0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n |0\rangle z^{-n-2} = \lim_{z \rightarrow 0} \sum_{n \leq -2} L_n |0\rangle z^{-n-2} = \sum_{n \leq -2} L_n |0\rangle \lim_{z \rightarrow 0} z^{-n-2} = L_{-2} |0\rangle = \frac{1}{2} \sum_{r \in \mathbb{Z}} a_r a_{-r-2} |0\rangle \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{r \leq -1} a_r a_{-r-2} |0\rangle + \sum_{r \geq 0} a_{-r-2} a_r |0\rangle \right\} = \frac{1}{2} a_{-1}^2 |0\rangle \end{aligned}$$

et on peut donc associer le champ $T(z)$ à l'état $\frac{1}{2} a_{-1}^2 |0\rangle$. Il est à noter que ce résultat est cohérent avec l'écriture $T(z) = \frac{1}{2} : \partial\varphi(z) \partial\varphi(z) :$ introduite à la fin de la section 4.1.

Un dernier exemple intéressant est fourni par la proposition suivante.

Proposition 5.1. $\forall j \in \mathbb{N}$, le champ $\partial^j \varphi$ correspond à l'état $(j-1)! a_{-j} |0\rangle$.

Démonstration. Le résultat s'obtient par un calcul direct. En effet, $\forall j \in \mathbb{N}$,

$$\partial^j \varphi = \partial^{j-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^{-n-1} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \partial^{j-1} z^{-n-1} = (-1)^{j+1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\prod_{k=1}^{j-1} (n+k) \right) a_n z^{-n-j}$$

et ainsi,

$$\begin{aligned} |\partial^j \varphi\rangle &= \lim_{z \rightarrow 0} (-1)^{j+1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\prod_{k=1}^{j-1} (n+k) \right) a_n |0\rangle z^{-n-j} = (-1)^{j+1} \lim_{z \rightarrow 0} \sum_{n \leq -1} \left(\prod_{k=1}^{j-1} (n+k) \right) a_n |0\rangle z^{-n-j} \\ &\stackrel{1}{=} (-1)^{j+1} \lim_{z \rightarrow 0} \sum_{n \leq -j} \left(\prod_{k=1}^{j-1} (n+k) \right) a_n |0\rangle z^{-n-j} = (-1)^{j+1} \sum_{n \leq -j} \left(\prod_{k=1}^{j-1} (n+k) \right) a_n |0\rangle \lim_{z \rightarrow 0} z^{-n-j} \\ &= (-1)^{j+1} a_{-j} |0\rangle \prod_{k=1}^{j-1} (-j+k) = (-1)^{j+1+j-1} a_{-j} |0\rangle \prod_{k=1}^{j-1} (j-k) = (j-1)! a_{-j} |0\rangle \end{aligned}$$

où l'égalité 1 vient du fait que $\forall n \in \{-1, \dots, -j\}$, $\prod_{k=1}^{j-1} (n+k) = 0$. □

10. En fait, l'inversibilité de cette correspondance dépend de la définition que l'on attribue au terme "champ" [3]. Or, les théoriciens s'accordent généralement pour dire que l'envoi d'un état au champ lui correspondant constitue une application injective. Ce fait sera explicitement utilisé à la fin du document.

En prenant la limite lorsque z tend vers zéro lors de l'obtention de l'état du module de Verma $|\psi\rangle$ correspondant à un champ $\psi(z)$ (voir éq. 5.1), on s'intéresse en fait à un état correspondant à $\psi(z)|0\rangle$ dans la limite $\tau \rightarrow -\infty$ selon les changements de variables de la section 4.1 ; c'est-à-dire dans le passé asymptotiquement lointain.

5.2 Expansion en produit d'opérateurs

À l'aide des règles de commutation de l'équation 4.1 et de la décomposition en série de Fourier pour le champ holomorphe $\partial\varphi(z)$, présentée à la section 4.2, il est possible d'effectuer le calcul suivant

$$[a_m, \partial\varphi(w)] = \left[a_m, \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n w^{-n-1} \right] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} [a_m, a_n] w^{-n-1} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} m \delta_{m+n=0} w^{-n-1} = m w^{m-1}$$

Cependant, l'expression

$$[\partial\varphi(z), \partial\varphi(w)] = \left[\sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m z^{-m-1}, \partial\varphi(w) \right] = \sum_{m \in \mathbb{Z}} [a_m, \partial\varphi(w)] z^{-m-1} = \frac{1}{z^2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} m \left(\frac{w}{z} \right)^{m-1}$$

est clairement divergente en général. Pour régler cette problématique, il est nécessaire d'introduire un autre ordre canonique, en plus de l'ordre normal sur les modes a_n , entre les champs $\partial\varphi(z)$ et $\partial\varphi(w)$.

Définition 5.2. Le produit radialement ordonné¹¹ de deux champs $\phi(z)$ et $\psi(w)$ est défini¹² par

$$\mathcal{R}\{\phi(z)\psi(w)\} = \begin{cases} \phi(z)\psi(w) & \text{si } |z| > |w| \\ \phi(w)\psi(z) & \text{si } |z| < |w| \end{cases} \quad (5.2)$$

L'ordre radial est défini \mathbb{C} -linéaire de sorte qu'il se distribue sur les combinaisons \mathbb{C} -linéaires de champs. On définit aussi inductivement un produit radialement ordonné de n champs ($n > 1$) comme

$$\mathcal{R}\{\phi_1(z_1)\phi_2(z_2)\dots\phi_n(z_n)\} = \mathcal{R}\{\phi_1(z_1)\mathcal{R}\{\phi_2(z_2)\dots\phi_n(z_n)\}\}$$

Ainsi, lors de l'application d'un produit radialement ordonné de champs sur un état d'un module de Verma, le premier champ à agir est celui qui est associé à la composante de plus faible magnitude ; c'est-à-dire à celui de plus petite composante temporelle (car $|z| \rightarrow 0 \Rightarrow \tau \rightarrow -\infty$ selon la section 4.1). À l'aide de cet ordre, on élimine aisément la singularité cachée dans le commutateur $[\partial\varphi(z), \partial\varphi(w)]$. En effet,

$$\mathcal{R}\{[\partial\varphi(z), \partial\varphi(w)]\} = \mathcal{R}\{\partial\varphi(z)\partial\varphi(w) - \partial\varphi(w)\partial\varphi(z)\} = \mathcal{R}\{\partial\varphi(z)\partial\varphi(w)\} - \mathcal{R}\{\partial\varphi(w)\partial\varphi(z)\} = 0$$

Par ailleurs, l'ordre radial nous permet d'obtenir le résultat suivant :

Proposition 5.2 (Expansion en produit d'opérateurs de $\partial\varphi(z)\partial\varphi(w)$).

$$\mathcal{R}\{\partial\varphi(z)\partial\varphi(w)\} = \frac{1}{(z-w)^2} + : \partial\varphi(z)\partial\varphi(w) :$$

et la partie principale de la série de Laurent de $\mathcal{R}\{\partial\varphi(z)\partial\varphi(w)\}$ autour de $z = w$ est $(z-w)^{-2}$.

Démonstration. Posons $\zeta \in \{z, w\}$ tel que $|\zeta| = \max\{|z|, |w|\}$ ainsi que $\eta \in \{z, w\} \setminus \{\zeta\}$. Alors¹³, $|\eta| < |\zeta|$ et

$$\mathcal{R}\{\partial\varphi(\zeta)\partial\varphi(\eta)\} = \partial\varphi(\zeta)\partial\varphi(\eta) = \sum_{r, s \in \mathbb{Z}} a_r a_s \zeta^{-r-1} \eta^{-s-1} \stackrel{1}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{r \in \mathbb{Z}} a_r a_{n-r} \zeta^{-r-1} \eta^{-n-1+r}$$

où le changement d'indices muets $s \mapsto n-r$ a été effectué pour l'égalité 1. Ainsi, puisque le produit $a_r a_{n-r}$ est normalement ordonné pour $n \neq 0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\{\partial\varphi(\zeta)\partial\varphi(\eta)\} &= \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \sum_{r \in \mathbb{Z}} : a_r a_{n-r} : \zeta^{-r-1} \eta^{-n-1+r} + \sum_{r \in \mathbb{Z}} a_r a_{-r} \zeta^{-r-1} \eta^{r-1} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \sum_{r \in \mathbb{Z}} : a_r a_{n-r} : \zeta^{-r-1} \eta^{-n-1+r} + \sum_{r \leq -1} a_r a_{-r} \zeta^{-r-1} \eta^{r-1} + \sum_{r \geq 0} a_r a_{-r} \zeta^{-r-1} \eta^{r-1} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \sum_{r \in \mathbb{Z}} : a_r a_{n-r} : \zeta^{-r-1} \eta^{-n-1+r} + \sum_{r \leq -1} : a_r a_{-r} : \zeta^{-r-1} \eta^{r-1} + \sum_{r \geq 0} (a_{-r} a_r + r) \zeta^{-r-1} \eta^{r-1} \end{aligned}$$

11. Certains auteurs préfèrent le terme *produit chronologique* [9].

12. Le cas où $|z| = |w|$ n'est pas traité étant donné qu'il survient avec une probabilité nulle.

13. On rappelle que le cas $|z| = |w|$ n'est pas considéré.

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}\{\partial\varphi(\zeta)\partial\varphi(\eta)\} &= \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \sum_{r \in \mathbb{Z}} : a_r a_{n-r} : \zeta^{-r-1} \eta^{-n-1+r} + \sum_{r \leq -1} : a_r a_{-r} : \zeta^{-r-1} \eta^{r-1} + \sum_{r \geq 0} (: a_r a_r : + r) \zeta^{-r-1} \eta^{r-1} \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{r \in \mathbb{Z}} : a_r a_{n-r} : \zeta^{-r-1} \eta^{-n-1+r} + \sum_{r \geq 0} r \zeta^{-r-1} \eta^{r-1} \\
 &= \sum_{r, s \in \mathbb{Z}} : a_r a_s : \zeta^{-r-1} \eta^{-s-1} + \frac{1}{\zeta^2} \sum_{r \geq 1} r \left(\frac{\eta}{\zeta} \right)^{r-1} = : \partial\varphi(\zeta)\partial\varphi(\eta) : + \frac{1}{\zeta^2} \sum_{r \geq 1} r \left(\frac{\eta}{\zeta} \right)^{r-1}
 \end{aligned}$$

La seconde série de cette expression correspond à une série arithmético-géométrique de raison η/ζ telle que $|\eta/\zeta| < 1$ car $\eta < \zeta$ par construction. Donc,

$$\sum_{r \geq 1} r \left(\frac{\eta}{\zeta} \right)^{r-1} = \frac{1}{1 - \eta/\zeta} + \frac{\eta/\zeta}{(1 - \eta/\zeta)^2} = \frac{1}{(1 - \eta/\zeta)^2}$$

Ainsi,

$$\mathcal{R}\{\partial\varphi(\zeta)\partial\varphi(\eta)\} = : \partial\varphi(\zeta)\partial\varphi(\eta) : + \frac{1}{\zeta^2} \frac{1}{(1 - \eta/\zeta)^2} = : \partial\varphi(\zeta)\partial\varphi(\eta) : + \frac{1}{(\zeta - \eta)^2}$$

Alors, puisque $(\zeta, \eta) = (z, w)$ ou $(\zeta, \eta) = (w, z)$, que $: \partial\varphi(z)\partial\varphi(w) : = : \partial\varphi(w)\partial\varphi(z) :$ (voir la proposition 4.1) et que $\mathcal{R}\{\partial\varphi(z)\partial\varphi(w)\} = \mathcal{R}\{\partial\varphi(w)\partial\varphi(z)\}$, on retrouve dans les deux cas

$$\mathcal{R}\{\partial\varphi(z)\partial\varphi(w)\} = \frac{1}{(z - w)^2} + : \partial\varphi(z)\partial\varphi(w) :$$

Finalement, puisque

$$: \partial\varphi(z)\partial\varphi(w) : = \sum_{r, s \in \mathbb{Z}} : a_r a_s : z^{-r-1} w^{-s-1}$$

est clairement analytique autour de $z = w$, la partie principale de l'expansion de $\mathcal{R}\{\partial\varphi(z)\partial\varphi(w)\}$ en série de Laurent autour de $z = w$ est simplement $(z - w)^{-2}$. \square

La série de Laurent obtenue implicitement dans la démonstration précédente lors de l'obtention de l'expression explicite de $\mathcal{R}\{\partial\varphi(z)\partial\varphi(w)\}$ s'appelle une *expansion en produits d'opérateurs*. De façon générale, une telle expansion peut être vue comme une opération algébrique sur les produits radialement ordonnés de champs quantiques [3]. Cependant, la notation usuelle pour ces expansions est un peu plus laxiste que celle qui a été utilisée ci-haut. En effet, pour éviter les singularités, les produits de champs sont généralement considérés, en théorie conforme des champs, comme radialement ordonnés sauf mention du contraire et le symbole \mathcal{R} , dénotant l'ordre radial, est ainsi couramment omis. Par ailleurs, il s'avère que, pour la plupart des calculs intéressants en CFT, seule la partie principale de la série de Laurent obtenue par expansion en produit d'opérateurs est importante. Pour cette raison, les physiciens omettent aussi généralement d'écrire la partie analytique de cette série et l'expression obtenue dans la proposition précédente serait par conséquent typiquement écrite comme

$$\partial\varphi(z)\partial\varphi(w) \sim \frac{1}{(z - w)^2}$$

où le symbole \sim indique que le résultat est valide à un terme analytique en $z = w$ près. Ce raccourci de notation sera parfois utilisé dans ce document, mais les produits de champs radialement ordonnés seront en général explicitement identifiés avec le symbole \mathcal{R} .

5.3 Théorème de Wick

Le théorème de Wick est un résultat utilisé dans de nombreux domaines de la physique théorique et des mathématiques modernes. Il est notamment caché sous le formalisme des diagrammes de Feynman [9]. Dans le contexte de ce document, ce théorème donne une expression explicite pour le produit radialement ordonné $\mathcal{R}\{\partial\varphi(z_1)\dots\partial\varphi(z_n)\}$ où $n \in \mathbb{N}$. Il sera dérivé dans le cas $n = 3$ et sera ensuite énoncé pour un produit arbitraire de champs (bosoniques et libres).

Proposition 5.3 (Théorème de Wick pour $n = 3$). *Posant $R \equiv \mathcal{R}\{\partial\varphi(z_1)\partial\varphi(z_2)\partial\varphi(z_3)\}$, on a*

$$R = : \partial\varphi(z_1)\partial\varphi(z_2)\partial\varphi(z_3) : + \frac{1}{(z_1 - z_2)^2} \partial\varphi(z_3) + \frac{1}{(z_1 - z_3)^2} \partial\varphi(z_2) + \frac{1}{(z_2 - z_3)^2} \partial\varphi(z_1)$$

Démonstration. Posons, $\forall j \in \{1, 2, 3\}$, $\partial\varphi_+(z_j) = \sum_{n \geq 0} a_n z^{-n-1}$ et $\partial\varphi_-(z_j) = \sum_{n \leq -1} a_n z^{-n-1}$. Alors, pour tout choix de j dans $\{1, 2, 3\}$, $\partial\varphi(z_j) = \partial\varphi_-(z_j) + \partial\varphi_+(z_j)$ et, si $k \in \{1, 2, 3\} \setminus \{j\}$,

$$[\partial\varphi_-(z_j), \partial\varphi_-(z_k)] = 0 = [\partial\varphi_+(z_j), \partial\varphi_+(z_k)]$$

étant donné que $[a_n, a_m] = 0$ si n et m sont de même signe. De plus, si $j, k \in \{1, 2, 3\}$ sont tels que $|z_j| > |z_k|$, alors

$$[\partial\varphi_+(z_j), \partial\varphi_-(z_k)] = \sum_{n \geq 0} \sum_{m \leq -1} [a_n, a_m] z^{-n-1} w^{-m-1} = \sum_{n \geq 0} n z^{-n-1} w^{n-1} = \frac{1}{(z-w)^2} \quad (5.3)$$

où la dernière égalité a été obtenue lors de la démonstration de la proposition 5.2. Supposons désormais, sans perte de généralités¹⁴, que $|z_1| > |z_2| > |z_3|$ de sorte que

$$\begin{aligned} R \equiv \mathcal{R}\{\partial\varphi(z_1)\partial\varphi(z_2)\partial\varphi(z_3)\} &= \partial\varphi(z_1)\partial\varphi(z_2)\partial\varphi(z_3) = \partial\varphi(z_1)\mathcal{R}\{\partial\varphi(z_2)\partial\varphi(z_3)\} \\ &\stackrel{1}{=} \partial\varphi(z_1) \left(: \partial\varphi(z_2)\partial\varphi(z_3) : + \frac{1}{(z_2 - z_3)^2} \right) \\ &= \partial\varphi(z_1) : \partial\varphi(z_2)\partial\varphi(z_3) : + \frac{1}{(z_2 - z_3)^2} \partial\varphi(z_1) \end{aligned}$$

où le résultat de la proposition 5.2 a été utilisé à l'équation 1. Par ailleurs, à l'annexe D, il est démontré que

$$\partial\varphi(z_1) : \partial\varphi(z_2)\partial\varphi(z_3) : = : \partial\varphi(z_1)\partial\varphi(z_2)\partial\varphi(z_3) : + \frac{1}{(z_1 - z_2)^2} \partial\varphi(z_3) + \frac{1}{(z_1 - z_3)^2} \partial\varphi(z_2)$$

Ainsi, tel qu'annoncé, $R = : \partial\varphi(z_1)\partial\varphi(z_2)\partial\varphi(z_3) : + \frac{1}{(z_1 - z_2)^2} \partial\varphi(z_3) + \frac{1}{(z_1 - z_3)^2} \partial\varphi(z_2) + \frac{1}{(z_2 - z_3)^2} \partial\varphi(z_1)$. \square

Pour énoncer le résultat général, il est nécessaire d'introduire une opération supplémentaire sur les champs. Soit un produit normalement ordonné de n champs quantiques $\partial\varphi(z_i)$, c-à-d. $: \partial\varphi(z_1)\dots\partial\varphi(z_n) :$. Soient $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $i < j$. On définit la contraction des champs $\partial\varphi(z_i)$ et $\partial\varphi(z_j)$ dans le produit $\partial\varphi(z_1)\dots\partial\varphi(z_n)$ comme l'expression

$$: \partial\varphi(z_1)\dots\overbrace{\partial\varphi(z_i)\dots\partial\varphi(z_j)}\dots\partial\varphi(z_n) : \equiv \frac{1}{(z_i - z_j)^2} : \partial\varphi(z_1)\dots\partial\varphi(z_n) :$$

où les champs $\partial\varphi(z_i)$ et $\partial\varphi(z_j)$ n'apparaissent plus dans le membre de droite. En fait, la contraction des champs $\partial\varphi(z_i)$ et $\partial\varphi(z_j)$ dans $\partial\varphi(z_1)\dots\partial\varphi(z_n)$ est l'expression obtenue en remplaçant ces champs par leur expansion en produit d'opérateurs (voir proposition 5.2)¹⁵. Il est à noter que des contractions multiples sont aussi possibles. Par exemple, si $1 \leq i < j < k < l \leq n \in \mathbb{N}$, alors la contraction des champs $\partial\varphi(z_i)$ et $\partial\varphi(z_k)$ ainsi que $\partial\varphi(z_j)$ et $\partial\varphi(z_l)$ dans le produit $\partial\varphi(z_1)\dots\partial\varphi(z_n)$ est

$$: \partial\varphi(z_1)\dots\overbrace{\partial\varphi(z_i)\dots\partial\varphi(z_k)}\dots\overbrace{\partial\varphi(z_j)\dots\partial\varphi(z_l)}\dots\partial\varphi(z_n) : = \frac{1}{(z_i - z_k)^2} \frac{1}{(z_j - z_l)^2} : \partial\varphi(z_1)\dots\partial\varphi(z_n) :$$

où les champs $\partial\varphi(z_i)$, $\partial\varphi(z_j)$, $\partial\varphi(z_k)$ et $\partial\varphi(z_l)$ n'apparaissent plus dans le membre de droite.

À partir de cette opération, le théorème de Wick s'énonce sous la forme suivante. Une démonstration de celui-ci se retrouve dans [10].

Théorème 5.1 (Théorème de Wick). *Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,*

$$\mathcal{R}\{\partial\varphi(z_1)\dots\partial\varphi(z_n)\} = : \partial\varphi(z_1)\dots\partial\varphi(z_n) : + \text{toutes contractions (simples, doubles, triples, ...) possibles}$$

Par exemple, pour $n = 2$, on réobtient aisément le résultat de la proposition 5.2, c'est-à-dire

$$\mathcal{R}\{\partial\varphi(z_1)\partial\varphi(z_2)\} = : \partial\varphi(z_1)\partial\varphi(z_2) : + \frac{1}{(z_1 - z_2)^2}$$

14. Si cela n'est pas le cas, il n'y a qu'à permuter les indices étant donné que, pour tout choix d'indices i, j, k différents dans $\{1, 2, 3\}$, $\mathcal{R}\{\partial\varphi(z_1)\partial\varphi(z_2)\partial\varphi(z_3)\} = \mathcal{R}\{\partial\varphi(z_i)\partial\varphi(z_j)\partial\varphi(z_k)\}$. Nous rappelons par ailleurs que le cas $|z_i| = |z_j|$ avec $i \neq j$ n'est pas considéré puisqu'il survient avec une probabilité nulle.

15. Cela est équivalent à dire que les champs sont remplacés par un propagateur dans une expression contractée, mais nous n'utilisons pas cette terminologie étant donné que le formalisme d'intégrale de chemin n'est pas mis à profit dans notre document.

De plus, pour $n = 4$, en posant $R \equiv \mathcal{R}\{\partial\varphi(z_1)\partial\varphi(z_2)\partial\varphi(z_3)\partial\varphi(z_4)\}$, on a

$$\begin{aligned} R = & : \partial\varphi(z_1)\partial\varphi(z_2)\partial\varphi(z_3)\partial\varphi(z_4) : + \frac{1}{(z_1 - z_2)^2} : \partial\varphi(z_3)\partial\varphi(z_4) : + \frac{1}{(z_1 - z_3)^2} : \partial\varphi(z_2)\partial\varphi(z_4) : \\ & + \frac{1}{(z_1 - z_4)^2} : \partial\varphi(z_2)\partial\varphi(z_3) : + \frac{1}{(z_2 - z_3)^2} : \partial\varphi(z_1)\partial\varphi(z_4) : + \frac{1}{(z_2 - z_4)^2} : \partial\varphi(z_1)\partial\varphi(z_3) : \\ & + \frac{1}{(z_3 - z_4)^2} : \partial\varphi(z_1)\partial\varphi(z_2) : + \frac{1}{(z_1 - z_2)^2} \frac{1}{(z_3 - z_4)^2} + \frac{1}{(z_1 - z_3)^2} \frac{1}{(z_2 - z_4)^2} + \frac{1}{(z_1 - z_4)^2} \frac{1}{(z_2 - z_3)^2} \end{aligned}$$

Le théorème de Wick nous permet donc d'obtenir rapidement des expansions en produit d'opérateurs pour des produits de champs bosoniques libres. Cependant, pour les calculs effectués dans ce document, il est possible d'obtenir ces expansions encore plus efficacement à l'aide d'une version révisée de ce théorème s'appliquant aux produits de produits de champs normalement ordonnés (c.à.d. $: \partial\varphi(z_1)\partial\varphi(z_2) : : \partial\varphi(z_3)\partial\varphi(z_4) :$ par exemple). Cette nouvelle version stipule que les seules contractions à faire sont celles qui correspondent à des champs appartenant à des produits normalement ordonnés différents [3]. Par exemple, l'expansion de $T(z)T(w)$ est

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\{T(z)T(w)\} &= \frac{1}{4} \mathcal{R}\{ : \partial\varphi(z)\partial\varphi(z) : : \partial\varphi(w)\partial\varphi(w) : \} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ : \partial\varphi(z)\partial\varphi(z)\partial\varphi(w)\partial\varphi(w) : + : \overbrace{\partial\varphi(z)\partial\varphi(z)\partial\varphi(w)\partial\varphi(w)} : + : \overbrace{\partial\varphi(z)\partial\varphi(z)\partial\varphi(w)\partial\varphi(w)} : \right. \\ &\quad + : \overbrace{\partial\varphi(z)\partial\varphi(z)\partial\varphi(w)\partial\varphi(w)} : + : \overbrace{\partial\varphi(z)\partial\varphi(z)\partial\varphi(w)\partial\varphi(w)} : + : \overbrace{\partial\varphi(z)\partial\varphi(z)\partial\varphi(w)\partial\varphi(w)} : \\ &\quad \left. + : \overbrace{\partial\varphi(z)\partial\varphi(z)\partial\varphi(w)\partial\varphi(w)} : \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ : \partial\varphi(z)\partial\varphi(z)\partial\varphi(w)\partial\varphi(w) : + \frac{4}{(z-w)^2} : \partial\varphi(z)\partial\varphi(w) : + \frac{2}{(z-w)^4} \right\} \\ &\sim \frac{1}{(z-w)^2} : \partial\varphi(z)\partial\varphi(w) : + \frac{1}{2} \frac{1}{(z-w)^4} \\ &\sim \frac{1}{2} \frac{1}{(z-w)^4} + \frac{1}{(z-w)^2} : \partial\varphi(w)\partial\varphi(w) : + \frac{1}{z-w} : \partial^2\varphi(w)\partial\varphi(w) : \end{aligned}$$

où, à la dernière ligne, une expansion en série de Taylor a été effectuée sur $: \partial\varphi(w)\partial\varphi(w) :$ en ne gardant que les termes singuliers. Par ailleurs, puisque l'ordre normal est symétrique (voir proposition 4.1),

$$: \partial^2\varphi(w)\partial\varphi(w) : = \frac{1}{2} \left(: \partial^2\varphi(w)\partial\varphi(w) : + : \partial\varphi(w)\partial^2\varphi(w) : \right) = \frac{1}{2} \partial \left\{ : \partial\varphi(w)\partial\varphi(w) : \right\} = \partial T(w)$$

Ainsi,

$$\mathcal{R}\{T(z)T(w)\} \sim \frac{1}{2} \frac{1}{(z-w)^4} + \frac{1}{(z-w)^2} 2T(w) + \frac{1}{z-w} : \partial T(w) : \quad (5.4)$$

Une dernière expansion qui sera utilisée dans les sections subséquentes est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\{T(z)\partial\varphi(w)\} &= \frac{1}{2} \mathcal{R}\{ : \partial\varphi(z)\partial\varphi(z) : : \partial\varphi(w) \} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ : \partial\varphi(z)\partial\varphi(z)\partial\varphi(w) : + \overbrace{ : \partial\varphi(z)\partial\varphi(z)\partial\varphi(w) : } + : \overbrace{\partial\varphi(z)\partial\varphi(z)\partial\varphi(w)} : \right\} \\ &= \frac{1}{2} : \partial\varphi(z)\partial\varphi(z)\partial\varphi(w) : + \frac{1}{(z-w)^2} \partial\varphi(z) \sim \frac{1}{(z-w)^2} \partial\varphi(w) + \frac{1}{(z-w)} \partial^2\varphi(w) \end{aligned}$$

où une autre série de Taylor autour de $z = w$ a été effectuée en ne gardant que la partie principale.

Voyons maintenant comment appliquer les expansions en produit d'opérateurs de façon concrète.

5.4 Application des expansions en produit d'opérateurs

Une première raison de l'importance des expansions en produit d'opérateurs est que celles-ci permettent le calcul de règles de commutation parfois hautement non-triviales. Par exemple, à partir de l'expansion de l'équation 5.4, il est possible de démontrer que les modes L_n du tenseur énergie-impulsion $T(z)$ satisfont à l'algèbre de Virasoro¹⁶ (voir eq. 2.1) de charge centrale $c = 1$. En effet, la décomposition en série de Laurent

$$T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$$

implique, par le théorème des résidus de Cauchy (voir l'annexe C.3), la relation

$$L_n = \oint_0 T(z) z^{n+1} \frac{dz}{2\pi i}$$

où \oint_0 signifie que l'intégration est faite sur une courbe fermée, parcourue en sens anti-horaire, autour de l'origine. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= \left[\oint_0 T(z) z^{m+1} \frac{dz}{2\pi i}, \oint_0 T(w) w^{n+1} \frac{dw}{2\pi i} \right] \\ &= \oint_0 \oint_0 T(z) T(w) z^{m+1} w^{n+1} \frac{dz}{2\pi i} \frac{dw}{2\pi i} - \oint_0 \oint_0 T(w) T(z) z^{m+1} w^{n+1} \frac{dz}{2\pi i} \frac{dw}{2\pi i} \\ &\stackrel{1}{=} \oint_0 \left\{ \left[\oint_{|z|>|w|} - \oint_{|z|<|w|} \right] \mathcal{R}\{T(z)T(w)\} z^{m+1} w^{n+1} \frac{dz}{2\pi i} \right\} \frac{dw}{2\pi i} \end{aligned}$$

où, pour l'égalité 1, les contours d'intégration ont été déformés de telle sorte que le produit de tenseurs énergie-impulsion soit ordonné radialement dans les deux intégrandes. On peut aussi transformer cette soustraction d'intégrales doubles en une seule intégration à l'aide de la soustraction de contours représentée sur la figure 2 du haut de la page suivante. Ainsi,

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= \oint_0 \left\{ \left[\oint_{|z|>|w|} - \oint_{|z|<|w|} \right] \mathcal{R}\{T(z)T(w)\} z^{m+1} w^{n+1} \frac{dz}{2\pi i} \right\} \frac{dw}{2\pi i} = \oint_0 \oint_w \mathcal{R}\{T(z)T(w)\} z^{m+1} w^{n+1} \frac{dz}{2\pi i} \frac{dw}{2\pi i} \\ &\stackrel{1}{=} \oint_0 \oint_w \left[\frac{1}{2(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} \right] z^{m+1} w^{n+1} \frac{dz}{2\pi i} \frac{dw}{2\pi i} \\ &= \oint_0 \left[\frac{1}{2} \oint_w \frac{z^{m+1}}{(z-w)^4} \frac{dz}{2\pi i} + 2T(w) \oint_w \frac{z^{m+1}}{(z-w)^2} \frac{dz}{2\pi i} + \partial T(w) \oint_w \frac{z^{m+1}}{z-w} \frac{dz}{2\pi i} \right] w^{n+1} \frac{dw}{2\pi i} \\ &\stackrel{2}{=} \oint_0 \left[\frac{1}{2} \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3}{dz^3} z^{m+1} \right) \Big|_{z=w} + 2T(w) \left(\frac{d}{dz} z^{m+1} \right) \Big|_{z=w} + \partial T(w) w^{m+1} \right] w^{n+1} \frac{dw}{2\pi i} \\ &= \frac{1}{12} m(m+1)(m-1) \oint_0 w^{m+n-1} \frac{dw}{2\pi i} + 2(m+1) \oint_0 T(w) w^{m+n+1} \frac{dw}{2\pi i} + \oint_0 \partial T(w) w^{m+n+2} \frac{dw}{2\pi i} \\ &\stackrel{3}{=} \frac{1}{12} (m^3 - m) \delta_{m+n=0} + 2(m+1) L_{m+n} - (m+n+2) \oint_0 T(w) w^{m+n+1} \frac{dw}{2\pi i} \\ &= \frac{1}{12} (m^3 - m) \delta_{m+n=0} + [2(m+1) - (m+n+2)] L_{m+n} = (m-n) L_{m+n} + \frac{1}{12} (m^3 - m) \delta_{m+n=0} \end{aligned}$$

Dans la démarche ci-haut, l'égalité 1 provient de l'expansion de l'équation 5.4, l'égalité 2 correspond à une utilisation du théorème intégral de Cauchy (voir section C.2) et l'égalité 3 provient de la représentation intégrale de la distribution de Kronecker (voir section C.2) et d'une intégration par parties. Il est à noter que seule la partie principale de l'expansion en produit d'opérateurs de l'équation 5.4 a été incluse dans l'intégrande de la droite de l'égalité 1 étant donné que les termes analytiques de celle-ci ne contribuent pas au résultat de l'intégration selon le théorème de Cauchy-Goursat (voir section C.2).

¹⁶. Pour plusieurs théoriciens (voir par exemple [3], [11]), c'est cette démonstration qui confirme que le problème du boson libre est bien une théorie conforme des champs conformément à ce qui a été dit à la fin de la section 4.3.

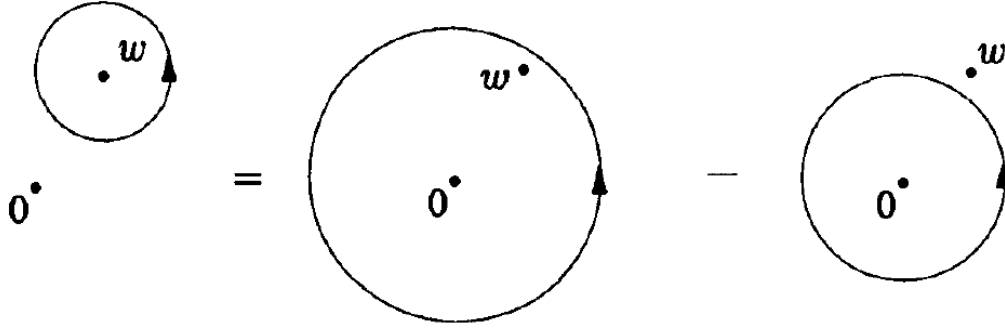


FIGURE 2 – Soustraction de contours utilisée dans la démonstration de la page précédente [8].

La procédure explicitée à la page précédente peut être inversée et il est possible, à partir d'une bonne connaissance de la correspondance état-champ (voir section 5.1), d'obtenir des expansions en produit d'opérateurs à partir de règles de commutation. Par exemple, l'expansion obtenue à la fin de la section 5.3 peut aussi être obtenue grâce à la proposition 4.2.

Pour ce faire, on pose l'*ansatz* d'expansion

$$\mathcal{R}\{T(z)\partial\varphi(w)\} = \sum_n \psi_n(w)(z-w)^{-n-1}$$

où le domaine d'indices pour la sommation n'est pas encore connu et où les $\psi_n(w)$ sont des champs arbitraires. L'astuce consiste ensuite à appliquer les deux côtés au vide $|0\rangle$ et de prendre ensuite la limite lorsque w tend vers 0; c'est-à-dire

$$\lim_{w \rightarrow 0} \mathcal{R}\{T(z)\partial\varphi(w)\} |0\rangle = T(z) |\partial\varphi\rangle = \sum_n |\psi_n\rangle z^{-n-1} = \sum_n \lim_{w \rightarrow 0} \psi_n(w) |0\rangle z^{-n-1} = \lim_{w \rightarrow 0} \sum_n \psi_n(w) z^{-n-1} |0\rangle$$

Ainsi, utilisant l'expansion de $T(z)$ en fonctions des modes L_n , on obtient

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n |\partial\varphi\rangle z^{-n-2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_{n-1} |\partial\varphi\rangle z^{-n-1} = \sum_n |\psi_n\rangle z^{-n-1}$$

Par conséquent, puisque les puissances de z sont fonctionnellement indépendantes, en utilisant les correspondances état-champ de la section 5.1.

$$|\psi_n\rangle = \begin{cases} L_{n-1} |\partial\varphi\rangle = L_{n-1} a_{-1} |0\rangle & \text{si } n \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

De plus, si $n \in \mathbb{Z}$,

$$|\psi_n\rangle = L_{n-1} a_{-1} |0\rangle = ([L_{n-1}, a_{-1}] + a_{-1} L_{n-1}) |0\rangle = a_{n-2} |0\rangle + a_{-1} L_{n-1} |0\rangle$$

et donc, puisque $\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$, $L_n |0\rangle = 0$ et que $a_m |0\rangle = 0$ si $m \geq 0$,

$$|\psi_n\rangle = \begin{cases} [a_{n-2} + a_{-1} L_{n-1}] |0\rangle & \text{si } n \in \mathbb{Z}_{\leq -1} \\ a_{-2} |0\rangle = |\partial^2\varphi\rangle & \text{si } n = 0 \\ a_{-1} |0\rangle = |\partial\varphi\rangle & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

De ce fait, on peut faire l'association $\psi_0(w) = \partial^2\varphi(w)$ et $\psi_1(w) = \partial\varphi(w)$. Puisque, selon les résultats obtenus ci-haut, ces termes sont les seuls qui apparaissent dans la partie principale de l'expansion de $\mathcal{R}\{T(z)\partial\varphi(w)\}$, on en déduit

$$\mathcal{R}\{T(z)\partial\varphi(w)\} \sim \psi_1(w)(z-w)^{-2} + \psi_0(w)(z-w)^{-1} = \frac{1}{(z-w)^2} \partial\varphi(w) + \frac{1}{z-w} \partial^2\varphi(w)$$

ce qui correspond exactement au résultat obtenu à la fin de la section 5.3.

5.5 Champs primaires

Dans la section 5.1, plusieurs champs ont été associés à un état d'un $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$ -module de Verma V_λ (avec $\lambda \in \mathbb{R}$) à l'aide de la correspondance état-champ (voir par exemple la proposition 5.1). Or, dans tous les cas, les états correspondants s'avéraient être des descendants de l'état de vide $|0\rangle$ ¹⁷ et ceux-ci sont donc tous contenus dans le $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$ -module V_0 . Cependant, une théorie conforme des champs étant une somme directe (continue) $\bigoplus_{\lambda \in \mathbb{R}} (V_\lambda \otimes V_\lambda)$ (voir la section 6), il doit être possible d'obtenir d'autres états de plus haut poids $|\lambda\rangle \in V_\lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

On dit qu'un champ quantique $\omega_\lambda(z)$ est un $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$ -champ primaire (ou *opérateur de vertex*) s'il correspond, via la correspondance état-champ, à un vecteur de plus haut poids $|\lambda\rangle$ d'un $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$ -module de Verma V_λ ; c'est-à-dire si

$$\lim_{z \rightarrow 0} \omega_\lambda(z) |0\rangle = |\lambda\rangle$$

Les champs correspondants aux descendants de $|\lambda\rangle$ sont quant à eux appelés $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$ -champs secondaires. Par exemple, le champ identité $\Omega(z) = 1$ est un $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$ -champ primaire puisque

$$\lim_{z \rightarrow 0} \Omega(z) |0\rangle = \lim_{z \rightarrow 0} |0\rangle = |0\rangle$$

Or, le champ $\partial\varphi(z)$ est un $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$ -champ secondaire qui n'est pas primaire puisque, selon la section 5.1,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \partial\varphi(z) |0\rangle = |\partial\varphi\rangle = a_{-1} |0\rangle \Rightarrow a_1 |\partial\varphi\rangle = a_1 a_{-1} |0\rangle = ([a_1, a_{-1}] + a_{-1} a_1) |0\rangle = |0\rangle \neq 0$$

et $\partial\varphi(z)$ n'est pas annihilé par a_1 .

On définit aussi un \mathfrak{Vir} -champ primaire comme un champ correspondant à un état propre de L_0 qui est annihilé par L_n pour tout $n > 0$. Cette notion englobe celle de $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$ -champ primaire. En effet, tout $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$ -champ primaire est un \mathfrak{Vir} -champ primaire selon la proposition suivante.

Proposition 5.4. *Soit $\omega_\lambda(z)$ un $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$ -champ primaire. Alors, $\omega_\lambda(z)$ est un \mathfrak{Vir} -champ primaire.*

Démonstration. Si $\omega_\lambda(z)$ est un $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$ -champ primaire, alors il correspond à un état de plus haut poids $|\lambda\rangle$ du $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$ -module de Verma V_λ . Alors, $a_0 |\lambda\rangle = \lambda |\lambda\rangle$ et, $\forall n > 0$, $a_n |\lambda\rangle = 0$. Dans ce cas,

$$L_0 |\lambda\rangle = \left(\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{r=1}^{\infty} a_{-r} a_r \right) |\lambda\rangle = \frac{1}{2} a_0^2 |\lambda\rangle = \frac{1}{2} \lambda^2 |\lambda\rangle$$

et $|\lambda\rangle$ est un état propre de L_0 . De plus, $\forall n > 0$,

$$L_n |\lambda\rangle = \frac{1}{2} \left(\sum_{r \leq -1} a_r a_{n-r} + \sum_{r \geq 0} a_{n-r} a_r \right) |\lambda\rangle = \frac{1}{2} a_n a_0 |\lambda\rangle = \frac{1}{2} \lambda a_n |\lambda\rangle = 0$$

Ainsi, $\omega_\lambda(z)$ est un \mathfrak{Vir} -champ primaire. □

La réciproque de la proposition précédente est cependant fautive. En effet, le champ $\partial\varphi(z)$, qui n'est pas un $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$ -champ primaire selon la démarche ci-haut, s'avère être un \mathfrak{Vir} -champ primaire puisque

$$\begin{aligned} L_0 |\partial\varphi\rangle &= \left(\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{r=1}^{\infty} a_{-r} a_r \right) a_{-1} |0\rangle = \frac{1}{2} \left(a_{-1} a_0^2 + \sum_{r=2}^{\infty} a_{-r} a_{-1} a_r + a_{-1} a_1 a_{-1} \right) |0\rangle \\ &= a_{-1} ([a_1, a_{-1}] + a_{-1} a_1) |0\rangle = a_{-1} |0\rangle = |\partial\varphi\rangle \text{ et, } \forall n > 0, \end{aligned}$$

$$L_n |\partial\varphi\rangle = \frac{1}{2} \left(\sum_{r \leq -1} a_r a_{n-r} + \sum_{r \geq 0} a_{n-r} a_r \right) a_{-1} |0\rangle = \frac{1}{2} (a_n a_0 + a_{n-1} a_1) a_{-1} |0\rangle = \frac{1}{2} a_{n-1} |0\rangle = 0$$

Il serait intéressant de pouvoir déterminer les $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$ -champs primaires et les \mathfrak{Vir} -champs primaires sans avoir besoin de les faire correspondre à un état d'un $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$ -module de Verma via la correspondance état-champ. Dans ce cas, la seule chose à faire est de calculer l'expansion en produit d'opérateurs des produits ordonnés $\mathcal{R}\{\partial\varphi(z)\omega_\lambda(w)\}$ et $\mathcal{R}\{T(z)\phi(w)\}$ où $\omega_\lambda(w)$ est un $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$ -champ primaire associé à un état de plus haut poids $|\lambda\rangle \in V_\lambda$ et où $\phi(w)$ est un \mathfrak{Vir} -champ primaire dont l'état correspondant est un état propre de L_0 de valeur propre $h \in \mathbb{R}$ ¹⁸.

17. c'est-à-dire des états obtenus par une application répétée d'éléments $a_{-n} \in \widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$ sur $|0\rangle$

18. Selon la proposition 4.4, le spectre de L_0 sur les modules de Verma est réel.

On pose donc les *ansatzs* d'expansion

$$\mathcal{R}\{\partial\varphi(z)\omega_\lambda(w)\} = \sum_n \psi_n(w)(z-w)^{-n-1} \quad \text{et} \quad \mathcal{R}\{T(z)\phi(w)\} = \sum_n \vartheta_n(w)(z-w)^{-n-1}$$

où les domaines d'indices pour les sommations demeurent inconnus. Alors, en procédant comme à fin de la section 5.4, on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{w \rightarrow 0} \mathcal{R}\{\partial\varphi(z)\omega_\lambda(w)\} |0\rangle &= \partial\varphi(z) |\lambda\rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n |\lambda\rangle z^{-n-1} = \sum_{n \leq 0} a_n |\lambda\rangle z^{-n-1} = \sum_n |\psi_n\rangle z^{-n-1} \quad \text{et} \\ \lim_{w \rightarrow 0} \mathcal{R}\{T(z)\phi(w)\} |0\rangle &= T(z) |\phi\rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n |\phi\rangle z^{-n-2} = \sum_{n \leq 0} L_n |\phi\rangle z^{-n-2} = \sum_n |\vartheta_n\rangle z^{-n-1} \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient,

$$|\psi_n\rangle = \begin{cases} a_n |\lambda\rangle & \text{si } n \leq -1 \\ \lambda |\lambda\rangle & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad |\vartheta_n\rangle = \begin{cases} L_{n-1} |\phi\rangle & \text{si } n \leq -1 \\ L_{-1} |\phi\rangle & \text{si } n = 0 \\ h |\phi\rangle & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les expansions en produit d'opérateurs voulues sont par conséquent

$$\mathcal{R}\{\partial\varphi(z)\omega_\lambda(w)\} \sim \frac{\lambda\omega_\lambda(w)}{z-w} \quad \text{et} \quad \mathcal{R}\{T(z)\phi(w)\} \sim \frac{h\phi(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial\phi(w)}{z-w} \quad (5.5)$$

où la correspondance entre $L_{-1} |\phi\rangle$ et $\partial\phi(w)$, explicitée¹⁹ dans [3] et [11], a été utilisée. Les expansions ci-dessus s'appellent des *caractérisations au niveau des champs*.

5.6 Fonctions de corrélation

En théorie conforme des champs, les observables s'expriment en termes de quantités appelées *fonctions de corrélation* (ou *corrélateurs*) s'exprimant à partir d'un produit scalaire généralisant la forme de Shapovalov définie sur les $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$ -modules de Verma V_λ (voir section 2.4.2). Cependant, avant de définir ces corrélateurs il est nécessaire d'introduire des adjoints pour les éléments formels $a_n \in \widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$ et $L_n \in \mathfrak{Vir}$.

L'opération envoyant un élément x , d'une algèbre de Lie complexe donnée \mathfrak{g} , vers son adjoint x^\dagger se doit de respecter quelques conditions. Tout d'abord, celle-ci doit être définie comme une involution, c'est-à-dire que, $\forall x \in \mathfrak{g}$, $(x^\dagger)^\dagger = x$. Finalement, celle-ci doit être antilinéaire et compatible avec le commutateur de l'algèbre de \mathfrak{g} de sorte que, $\forall x, y \in \mathfrak{g}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$[\alpha x, \beta y]^\dagger = [(\beta y)^\dagger, (\alpha x)^\dagger] = \overline{\alpha\beta} [y^\dagger, x^\dagger]$$

Dans le cas des algèbres $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$ et \mathfrak{Vir} , les définitions $a_n^\dagger \equiv a_{-n}$ et $L_n^\dagger = L_{-n}$ ($\forall n \in \mathbb{Z}$) définissent adéquatement des adjoints²⁰ puisque celles-ci sont clairement involutives et que, $\forall n, m \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} [a_m, a_n]^\dagger &= (m\delta_{m+n=0})^\dagger = m\delta_{m+n=0} = -n\delta_{-n-m=0} = [a_{-n}, a_{-m}] = [a_n^\dagger, a_m^\dagger] \\ [L_m, L_n^\dagger] &= \left((n-m)L_{n+m} + \frac{1}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n=0} \right)^\dagger = (n-m)L_{m+n}^\dagger + \frac{1}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n=0} \\ &= (-m - (-n))L_{-m-n} + \frac{1}{12}((-n)^3 - (-n))\delta_{-m-n=0} = [L_{-m}, L_{-n}] = [L_{-n}, L_{-m}] = [L_n^\dagger, L_m^\dagger] \end{aligned}$$

On définit alors le *corrélateur* du produit de champs $\psi_1(z_1)\psi_2(z_2)\dots\psi_n(z_n)$ comme le produit scalaire

$$\langle 0 | \psi_1(z_1)\psi_2(z_2)\dots\psi_n(z_n) | 0 \rangle$$

où les champs $\psi_i(z_i)$ peuvent évidemment agir à gauche (i.e. sur le *bra* $\langle 0 |$, comme leur adjoint $\psi_i^\dagger(z_i)$) ou à droite (i.e. sur le *ket* $| 0 \rangle$). Il est à noter que le produit scalaire $\langle \lambda | \lambda \rangle$ est aussi normalisé à 1 pour tout état de plus haut poids $|\lambda\rangle$ correspondant à un $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$ -module de Verma V_λ .

19. En général, le champ $\partial\phi(w)$ est associé à l'état $L_{-1} |\phi\rangle$ même lorsque $\phi(w)$ n'est pas un \mathfrak{Vir} -champ primaire. Cette correspondance est élevée au rang d'axiome dans plusieurs ouvrages mathématiques de théorie conforme des champs (voir par exemple [11]). Celle-ci est cohérente avec l'association entre ∂ et L_{-1} (voir prop. 3.2).

20. En considérant que ces définitions sont étendues antilinéairement aux algèbres en entier.

Par exemple,

- (i) Soit $n \in \mathbb{N}$, alors le produit de n champs identités $\Omega(z)$ donne le corrélateur

$$\langle 0 | \Omega(z_1) \dots \Omega(z_n) | 0 \rangle = \langle 0 | 0 \rangle = 1$$

- (ii) Le corrélateur du champ holomorphe $\partial\varphi(z)$ est identiquement nul puisque

$$\langle 0 | \partial\varphi(z) | 0 \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle 0 | a_n | 0 \rangle z^{-n-1} = 0$$

étant donné que $a_n | 0 \rangle = 0$ si $n \geq 0$ et que $\langle 0 | a_n = [a_n^\dagger | 0]^\dagger = [a_{-n} | 0]^\dagger = 0$ si $n \leq 0$.

- (iii) Soit $n \in \mathbb{N}$. Le corrélateur d'un produit normalement ordonné de n champs (sauf $\Omega(z)$) est aussi identiquement nul [7]. En particulier, le corrélateur du tenseur énergie-impulsion $T(z)$ vaut zéro.

- (iv) Le corrélateur d'un produit radialement ordonné de champs équivaut à certains termes singuliers de l'expansion en produit d'opérateurs correspondante. Notamment, selon la proposition 5.2,

$$\begin{aligned} \langle 0 | \mathcal{R}\{\partial\varphi(z)\partial\varphi(w)\} | 0 \rangle &= \langle 0 | : \partial\varphi(z)\partial\varphi(w) : + \frac{1}{(z-w)^2} | 0 \rangle = \langle 0 | : \partial\varphi(z)\partial\varphi(w) : | 0 \rangle + \frac{1}{(z-w)^2} \langle 0 | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{(z-w)^2} \quad \text{selon l'exemple précédent.} \end{aligned}$$

De plus, selon l'équation 5.4 et l'exemple précédent,

$$\begin{aligned} \langle 0 | \mathcal{R}\{T(z)T(w)\} | 0 \rangle &= \langle 0 | \frac{1}{2} \frac{1}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{(z-w)^4} \langle 0 | 0 \rangle + 2 \frac{1}{(z-w)^2} \langle 0 | T(w) | 0 \rangle + \frac{1}{z-w} \langle 0 | \partial T(w) | 0 \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{(z-w)^4} \end{aligned}$$

selon l'exemple (iii) et puisque $\partial T(w) =: \partial^2\phi(w)\partial\phi(w) : (voir p. 25)$.

En raison de l'importance physique des fonctions de corrélation (vues comme observables), le but principal de la théorie conforme des champs correspond, pour plusieurs théoriciens (voir [3],[7] par exemple), au calcul explicite de tous les corrélateurs de la théorie. Heureusement, il s'avère qu'il est possible de déduire l'expression de la fonction de corrélation d'un produit arbitraire de champs quantiques si le corrélateur de n $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$ -champs primaires a préalablement été calculé [7]. Or, puisque tout $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$ -champ primaire est un \mathfrak{Vir} -champ primaire (voir prop. 5.4), il est utile de considérer d'abord des champs primaires sous l'algèbre de Virasoro pour obtenir certaines contraintes générales avant de les spécialiser aux champs primaires sous $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$. Dans cette optique, il est nécessaire de calculer le commutateur $[L_m, \phi(w)]$ où $\phi(w)$ est un \mathfrak{Vir} -champ primaire correspondant à une valeur propre h sous L_0 . Pour ce faire, une méthode générale identique et des déformations de contours d'intégration similaires à ceux utilisés au début de la section 5.4 sont considérés. Le calcul explicite est

$$\begin{aligned} [L_m, \phi(w)] &= \left[\oint_0 T(z) z^{m+1} \frac{dz}{2\pi i}, \phi(w) \right] = \oint_0 T(z) \phi(w) z^{m+1} \frac{dz}{2\pi i} - \oint_0 \phi(w) T(z) z^{m+1} \frac{dz}{2\pi i} \\ &= \left[\oint_{|z|>|w|} - \oint_{|z|<|w|} \right] \mathcal{R}\{T(z)\phi(w)\} z^{m+1} \frac{dz}{2\pi i} = \oint_w \mathcal{R}\{T(z)\phi(w)\} z^{m+1} \frac{dz}{2\pi i} \\ &\stackrel{1}{=} \oint_w \left\{ \frac{h\phi(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial\phi(w)}{z-w} \right\} z^{m+1} \frac{dz}{2\pi i} = h\phi(w) \oint_w \frac{z^{m+1}}{(z-w)^2} \frac{dz}{2\pi i} + \partial\phi(w) \oint_w \frac{z^{m+1}}{z-w} \\ &\stackrel{2}{=} h\phi(w) \left(\frac{d}{dz} z^{m+1} \right) \Big|_{z=w} + \partial\phi(w) w^{m+1} = w^m (h(m+1)\phi(w) + w\partial\phi(w)) \end{aligned} \quad (5.6)$$

où, à l'égalité 1, l'expansion de l'équation 5.5 a été utilisée (sans les termes réguliers, par le théorème de Cauchy) et où l'égalité 2 correspond à l'utilisation du théorème intégral de Cauchy-Goursat.

Alors, puisque $\forall n \in \{-1, 0, 1\}$, $L_n | 0 \rangle = 0 = [L_{-n} | 0]^\dagger = [L_n^\dagger | 0]^\dagger = \langle 0 | L_n$, il est possible de dériver, par application répétée de la règle de commutation précédente, trois conditions pour les corrélateurs de produits de \mathfrak{Vir} -champs primaires.

En effet, on obtient,

$$\begin{aligned}
 0 &= \langle 0 | L_{-1} \phi_1(z_1) \dots \phi_n(z_n) | 0 \rangle = \sum_{j=1}^n \langle 0 | \phi_1(z_1) \dots [L_{-1}, \phi_j(z_j)] \dots \phi_n(z_n) | 0 \rangle + \langle 0 | \phi_1(z_1) \dots \phi_n(z_n) L_{-1} | 0 \rangle \\
 &= \sum_{j=1}^n \langle 0 | \phi_1(z_1) \dots \partial_j \phi_j(z_j) \dots \phi_n(z_n) | 0 \rangle = \sum_{j=1}^n \partial_j \langle 0 | \phi_1(z_1) \dots \phi_n(z_n) | 0 \rangle
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned}
 0 &= \langle 0 | L_0 \phi_1(z_1) \dots \phi_n(z_n) | 0 \rangle = \sum_{j=1}^n \langle 0 | \phi_1(z_1) \dots [L_0, \phi_j(z_j)] \dots \phi_n(z_n) | 0 \rangle + \langle 0 | \phi_1(z_1) \dots \phi_n(z_n) L_0 | 0 \rangle \\
 &= \sum_{j=1}^n \langle 0 | \phi_1(z_1) \dots (h_j + z_j \partial_j) \phi_j(z_j) \dots \phi_n(z_n) | 0 \rangle = \sum_{j=1}^n (h_j + z_j \partial_j) \langle 0 | \phi_1(z_1) \dots \phi_n(z_n) | 0 \rangle
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned}
 0 &= \langle 0 | L_1 \phi_1(z_1) \dots \phi_n(z_n) | 0 \rangle = \sum_{j=1}^n \langle 0 | \phi_1(z_1) \dots [L_1, \phi_j(z_j)] \dots \phi_n(z_n) | 0 \rangle + \langle 0 | \phi_1(z_1) \dots \phi_n(z_n) L_1 | 0 \rangle \\
 &= \sum_{j=1}^n \langle 0 | \phi_1(z_1) \dots z_j (2h_j + z_j \partial_j) \phi_j(z_j) \dots \phi_n(z_n) | 0 \rangle = \sum_{j=1}^n z_j (2h_j + z_j \partial_j) \langle 0 | \phi_1(z_1) \dots \phi_n(z_n) | 0 \rangle
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

où l'on a supposé, sans perte de généralités, que le \mathfrak{Vir} -champ primaire $\phi_j(z_j)$ correspond à la valeur propre h_j de L_0 et où le raccourci de notation $\frac{\partial}{\partial z_j} \equiv \partial_j$ a été utilisé.

Il s'agit de trois équations différentielles partielles qu'il est certainement possible de résoudre. Pour $n = 1$, l'équation 5.7 devient $0 = \partial_1 \langle 0 | \phi_1(z_1) | 0 \rangle$ et le corrélateur d'un \mathfrak{Vir} -champ primaire est donc constant. Les équations 5.8 et 5.9 donnent alors

$$(h_1 + z_1 \partial_1) \langle 0 | \phi_1(z_1) | 0 \rangle = h_1 \langle 0 | \phi_1(z_1) | 0 \rangle = 0 = 2h_1 z_1 \langle 0 | \phi_1(z_1) | 0 \rangle = z_1 (2h_1 + z_1 \partial_1) \langle 0 | \phi_1(z_1) | 0 \rangle$$

et le corrélateur du \mathfrak{Vir} -champ primaire $\phi_1(z_1)$ est ainsi nul sauf si $h_1 = 0$. Or, dans le cas du boson libre, le seul \mathfrak{Vir} -champ primaire associé à une valeur propre nulle de L_0 est le champ identité $\Omega(z)$ [3]. Par conséquent, pour tout \mathfrak{Vir} -champ primaire $\phi(z)$,

$$\langle 0 | \phi(z) | 0 \rangle = \langle 0 | \Omega(z) | 0 \rangle \delta_{\phi=\Omega} = \delta_{\phi=\Omega}$$

Pour $n = 2$, l'analyse est légèrement plus compliquée. En effet, dans ce cas, l'équation 5.7 devient $(\partial_1 + \partial_2) \langle 0 | \phi_1(z_1) \phi_2(z_2) | 0 \rangle = 0$ ce qui implique que $\langle 0 | \phi_1(z_1) \phi_2(z_2) | 0 \rangle$ ne dépend que de la différence $z_{12} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(z_1 - z_2)$. On pose donc $f(z_{12}) = \langle 0 | \phi_1(z_1) \phi_2(z_2) | 0 \rangle$. Dans ces nouvelles variables, l'équation 5.8 s'écrit

$$\begin{aligned}
 (h_1 + z_1 \partial_1 + h_2 + z_2 \partial_2) f(z_{12}) &= (h_1 + h_2 + z_{12} \partial_{12} + (z_1 + z_2)(\partial_1 + \partial_2)) f(z_{12}) = 0 \\
 &\Rightarrow (h_1 + h_2 + z_{12} \partial_{12}) f(z_{12}) = 0
 \end{aligned}$$

où ∂_{12} correspond à la dérivée partielle selon z_{12} . La solution générale de cette équation différentielle est

$$f(z_{12}) = \frac{C_{12}}{z_{12}^{h_1+h_2}} \text{ où } C_{12} \in \mathbb{C}$$

En fonction de z_{12} et de cette solution, l'équation 5.9 devient

$$\begin{aligned}
 0 &= [z_1(2h_1 + z_1 \partial_1) + z_2(2h_2 + z_2 \partial_2)] f(z_{12}) \\
 &= \sqrt{2} [(z_1 + z_2)(h_1 + h_2 + z_{12} \partial_{12}) + (h_1 - h_2) z_{12}] f(z_{12}) + \frac{1}{\sqrt{2}} ((z_1 + z_2)^2 + z_{12}^2) (\partial_1 + \partial_2) f(z_{12}) \\
 &= \sqrt{2} (z_1 + z_2) (z_{12} \partial_{12} + h_1 + h_2) f(z_{12}) + \sqrt{2} (h_1 - h_2) z_{12} f(z_{12}) \\
 &= \sqrt{2} (h_1 - h_2) z_{12} f(z_{12}) = (h_1 - h_2) \sqrt{2} \frac{C_{12}}{z_{12}^{h_1+h_2-1}}
 \end{aligned}$$

Par conséquent, soit $h_1 = h_2$ ou $C_{12} = 0$. Dans tous les cas,

$$f(z_{12}) = \langle 0 | \phi(z_1) \phi(z_2) | 0 \rangle = \frac{C_{12}}{(z_1 - z_2)^{h_1+h_2}} \delta_{h_1=h_2} \text{ où } C_{12} \in \mathbb{C} \tag{5.10}$$

Pour $n = 3$ et $n = 4$, la démarche est similaire au cas $n = 2$, mais substantiellement plus longue. Pour cette raison, le lecteur intéressé est renvoyé à [7] pour le cas $n = 4$ et à [3] pour le cas à trois champs primaires. Les résultats sont

$$\langle 0 | \phi_1(z_1) \phi_2(z_2) \phi_3(z_3) | 0 \rangle = \frac{C_{123}}{(z_1 - z_2)^{h_1+h_2-h_3} (z_1 - z_3)^{h_1-h_2+h_3} (z_2 - z_3)^{-h_1+h_2+h_3}} \quad (5.11)$$

$$\text{et } \langle 0 | \phi_1(z_1) \phi_2(z_2) \phi_3(z_3) \phi_4(z_4) | 0 \rangle = g \left(\frac{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)} \right) \prod_{1 \leq i < j \leq 4} (z_i - z_j)^{\frac{1}{3}(h_1+h_2+h_3+h_4)-h_i-h_j} \quad (5.12)$$

où $C_{123} \in \mathbb{C}$ et $g \in C^\omega(\mathbb{C})$ est une fonction holomorphe arbitraire.

Puisque, selon [3], il existe un nombre fini de \mathfrak{Vir} -champs primaires pour tout choix de valeur propre dans le spectre de L_0 , il est possible de choisir une base $\{\phi_i(z_i)\}$ pour le sous-espace des champs primaires associés à la valeur propre $h \in \text{spec } L_0$, permettant l'écriture des corrélateurs de l'équation 5.10 comme éléments d'une matrice \mathcal{M}^h ; c'est-à-dire

$$\mathcal{M}_{ij}^h \equiv \langle 0 | \phi_i(z_i) \phi_j(z_j) | 0 \rangle = \frac{C_{ij}}{(z_i - z_j)^{2h}}$$

Par ailleurs, si on considère que les \mathfrak{Vir} -champs primaires dans le corrélateur $\langle 0 | \phi_i(z_i) \phi_j(z_j) | 0 \rangle$ sont radialement ordonnés, on obtient, par la commutativité de l'ordre radial, que la matrice \mathcal{M}^h est symétrique, donc diagonalisable. Il existe ainsi en particulier une base dans laquelle cette matrice correspond à une matrice de permutation d'ordre 2, c'est-à-dire que, pour chaque \mathfrak{Vir} -champ primaire de base $\phi_i(z)$, il existe un unique \mathfrak{Vir} -champ primaire de base $\phi_i^*(w)$ (appelé le conjugué de $\phi_i(z)$) tel que

$$\mathcal{M}_{ij}^h \equiv \langle 0 | \phi_i(z) \phi_i^*(w) | 0 \rangle = \frac{1}{(z - w)^{2h}} \neq 0 \quad (5.13)$$

Évidemment, un champ primaire n'admettant pas de conjugué ne peut être considéré comme physique car, dans ce cas, tout corrélateur impliquant ce champ serait identiquement nul²¹.

Sachant quels champs primaires sont conjugués, il s'avère qu'il est possible de déterminer un critère de résolubilité pour la théorie du boson libre qui est bien plus faible que le calcul explicite de tous les corrélateurs. En effet, supposant qu'un corrélateur $\langle 0 | \phi_1(z_1) \phi_2(z_2) \phi_3(z_3) | 0 \rangle$ de \mathfrak{Vir} -champs primaires admette l'expansion en termes de produit d'opérateurs

$$\phi_1(z_1) \phi_2(z_2) = \sum_l \frac{f_{12}^l}{(z_1 - z_2)^{h_1+h_2-h_l}} \phi_l(z_2) + \dots$$

où les $f_{12}^l \in \mathbb{C}$ sont des constantes et les $\phi_l(z_2)$ sont des \mathfrak{Vir} -champs primaires. Alors,

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi_1(z_1) \phi_2(z_2) \phi_3(z_3) | 0 \rangle &= \sum_l \frac{f_{12}^l}{(z_1 - z_2)^{h_1+h_2-h_l}} \langle 0 | \phi_l(z_2) \phi_3(z_3) | 0 \rangle + \dots \\ &= \sum_l \frac{f_{12}^l}{(z_1 - z_2)^{h_1+h_2-h_l}} \frac{\delta_{\phi_l=\phi_3^*}}{(z_2 - z_3)^{2h_3}} + \dots = \frac{f_{12}^{3^*}}{(z_1 - z_2)^{h_1+h_2-h_3} (z_2 - z_3)^{2h_3}} + \dots \end{aligned} \quad (5.14)$$

D'autre part, l'équation 5.11 donne, puisque $z_1 - z_3 = (z_2 - z_3) \left(1 + \frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3}\right)$,

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi_i(z_1) \phi_j(z_2) \phi_k(z_3) | 0 \rangle &= \frac{C_{123}}{(z_1 - z_2)^{h_1+h_2-h_3} (z_2 - z_3)^{2h_3} \left(1 + \frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3}\right)^{h_1+h_3-h_2}} \\ &= \frac{C_{123}}{(z_1 - z_2)^{h_1+h_2-h_3} (z_2 - z_3)^{2h_3}} + \dots \end{aligned} \quad (5.15)$$

où le théorème du binôme généralisé²² a été utilisé.

21. En effet, un corrélateur impliquant n champs (avec $n \geq 3$) peut toujours être ramené à un corrélateur de 2 champs par des expansions en produit d'opérateurs puisque les produits de champs dans les corrélateurs sont ici considérés comme radialement ordonnés par défaut.

22. Si $h_2 > h_1 + h_3$, il s'agit de $\left(1 + \frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3}\right)^{h_1+h_3-h_2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{h_2 - h_1 - h_3 + k - 1}{k} \left(\frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3}\right)^k$.

Par conséquent, en comparant les équations 5.14 et 5.15, on obtient $C_{123} = f_{12}^{3*}$. Les expansions en produit d'opérateurs déterminent ainsi les corrélateurs à trois champs primaires et vice-versa [3]. De plus, puisque l'utilisation d'expansions en produit d'opérateurs permet de passer d'un corrélateur à n champs primaires (avec $n > 3$) à un corrélateur à 3 champs primaires, toutes les fonctions de corrélation d'une théorie conforme peuvent être évaluées si nous connaissons l'expression de ces derniers corrélateurs et de ceux à 2 champs. De ce chef, une théorie conforme est dite *résolue* lorsque les corrélateurs de 3 champs primaires ont été calculés (ce qui nécessite le calcul de ceux à 2 champs). Dans le cas du boson libre, seuls les $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$ -champs primaires sont à considérer (voir p. 30) et les corrélateurs à 2 champs s'obtiennent directement sachant les relations de conjugaison entre les champs primaires de base.

5.7 Fin de la résolution

Les corrélateurs à trois $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$ -champs primaires peuvent être évalués directement pour le cas du boson libre. La première étape consiste en l'intégration de l'expansion $\partial\varphi(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^{-n-1}$. On obtient

$$\varphi(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \int z^{-n-1} dz = \varphi_0 + a_0 \ln z - \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{a_n}{n} z^{-n}$$

où φ_0 est la constante d'intégration. Dans ce cas, l'expansion en produit d'opérateurs de la proposition 5.2 prend la forme (après intégration sur w , à un signe près),

$$\partial\varphi(z)\varphi(w) \sim \frac{1}{z-w}$$

Alors, puisque $\varphi(w) - a_0 \ln w = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varrho_n w^{-n-1}$ où $\varrho_n = -\frac{a_{n+1}}{n+1}(1 - \delta_{n+1=0}) + \varphi_0 \delta_{n+1=0}$, on a, selon le théorème des résidus de Cauchy,

$$\varrho_n = \oint_0 (\varphi(w) - a_0 \ln w) w^n \frac{dw}{2\pi i}$$

En particulier,

$$\begin{aligned} [a_m, \varphi_0] &= \left[\oint_0 \partial\varphi(z) z^m \frac{dz}{2\pi i}, \oint_0 (\varphi(w) - a_0 \ln w) w^{-1} \frac{dw}{2\pi i} \right] \\ &= \oint_0 \oint_0 \partial\varphi(z) (\varphi(w) - a_0 \ln w) z^m w^{-1} \frac{dz}{2\pi i} \frac{dw}{2\pi i} - \oint_0 \oint_0 (\varphi(w) - a_0 \ln w) \partial\varphi(z) z^m w^{-1} \frac{dz}{2\pi i} \frac{dw}{2\pi i} \\ &= \oint_0 \left[\oint_{|z|>|w|} - \oint_{|w|<|z|} \right] \mathcal{R}\{\partial\varphi(z) (\varphi(w) + a_0 \ln w)\} z^m w^{-1} \frac{dz}{2\pi i} \frac{dw}{2\pi i} \\ &= \oint_0 \oint_w \mathcal{R}\{\partial\varphi(z) (\varphi(w) + a_0 \ln w)\} z^m w^{-1} \frac{dz}{2\pi i} \frac{dw}{2\pi i} \\ &= \oint_0 \oint_w \mathcal{R}\{\partial\varphi(z) \varphi(w)\} z^m w^{-1} \frac{dz}{2\pi i} \frac{dw}{2\pi i} + a_0 \oint_0 \oint_w \ln w z^m w^{-1} \frac{dz}{2\pi i} \frac{dw}{2\pi i} \\ &= \oint_0 \left(\oint_w \frac{1}{z-w} z^m \frac{dz}{2\pi i} \right) w^{-1} \frac{dw}{2\pi i} + a_0 \oint_0 \left(\oint_w z^m \frac{dz}{2\pi i} \right) w^{-1} \ln w \frac{dw}{2\pi i} \\ &= \oint_0 w^{m-1} \frac{dw}{2\pi i} = \delta_{m=0} \end{aligned}$$

Ainsi, considérant l'état $e^{\lambda\varphi_0} |0\rangle \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \varphi_0^k(z) |0\rangle$, on a

$$\begin{aligned} a_0 e^{\lambda\varphi_0} |0\rangle &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} a_0 \varphi_0^k(z) |0\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \left(\sum_{j=1}^k \varphi_0^{j-1} [a_0, \varphi_0] \varphi_0^{k-j} |0\rangle + [a_0, \varphi_0] \varphi_0^{k-1} |0\rangle \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} k \varphi_0^{k-1} |0\rangle = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \varphi_0^{k-1} |0\rangle = \lambda e^{\lambda\varphi_0} |0\rangle \end{aligned}$$

et, $\forall n > 0$,

$$a_n e^{\lambda\varphi_0} |0\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} a_n \varphi_0^k(z) |0\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \left(\sum_{j=1}^k \varphi_0^{j-1} [a_n, \varphi_0] \varphi_0^{k-j} |0\rangle + [a_n, \varphi_0] \varphi_0^{k-1} |0\rangle \right) = 0$$

Il s'ensuit donc que l'état $e^{\lambda\varphi_0}$ correspond à l'état de plus haut poids $|\lambda\rangle$ du $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$ -module de Verma V_λ . Ainsi, l'expression d'un $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$ -champ primaire $\omega_\lambda(z)$ doit tendre vers $e^{\lambda\varphi_0}$ lorsque z tend vers 0 (modulo des termes qui s'annulent lorsqu'appliqués sur le ket $|0\rangle$). Une bonne hypothèse s'avère donc être

$$\omega_\lambda(z) = e^{\lambda\varphi_0} e^{\lambda a_0 \ln z} \prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{\lambda}{n} a_{-n} z^n} e^{-\frac{\lambda}{n} a_n z^{-n}}$$

En effet,

$$\forall n \geq 1, e^{-\frac{\lambda}{n} a_n z^{-n}} |0\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-\lambda}{n z^n} \right)^k \frac{1}{k!} a_n^k |0\rangle = |0\rangle \quad \text{et} \quad e^{\lambda a_0 \ln z} |0\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda \ln z)^k \frac{1}{k!} a_0^k |0\rangle = |0\rangle \quad (5.16)$$

Par ailleurs, si $f(z)$ et $g(z)$ sont des fonctions analytiques (sauf en un nombre fini de points), $\forall m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $m \neq -n$,

$$\left[e^{f(z)a_n}, e^{g(z)a_m} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} f(z)^k g(z)^l \frac{1}{k!} \frac{1}{l!} [a_n^k, a_m^l] = 0 \quad (5.17)$$

puisque $[a_n, a_m] = 0$ implique $[a_n^k, a_m^l] = 0$ par l'identité de Leibniz sur les commutateurs. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \omega_\lambda(z) |0\rangle &= \lim_{z \rightarrow 0} e^{\lambda\varphi_0} e^{\lambda a_0 \ln z} \prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{\lambda}{n} a_{-n} z^n} e^{-\frac{\lambda}{n} a_n z^{-n}} |0\rangle \stackrel{1}{=} \lim_{z \rightarrow 0} e^{\lambda\varphi_0} \left(\prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{\lambda}{n} a_{-n} z^n} \right) e^{\lambda a_0 \ln z} \prod_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\lambda}{n} a_n z^{-n}} |0\rangle \\ &\stackrel{2}{=} \lim_{z \rightarrow 0} e^{\lambda\varphi_0} \prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{\lambda}{n} a_{-n} z^n} |0\rangle = \lim_{z \rightarrow 0} e^{\lambda\varphi_0} |0\rangle = |\lambda\rangle \end{aligned}$$

où, aux égalités 1 et 2, les équations 5.17 et 5.16 ont respectivement été utilisées.

En fait, puisque la correspondance état-champ donne une application injective envoyant un état vers le champ lui correspondant, cette hypothèse est la bonne et tout $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$ -champ primaire peut s'écrire de cette façon. De plus, cette expression permet l'obtention de l'expansion en produit d'opérateurs suivante.

Proposition 5.5.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\{\omega_\lambda(z)\omega_\mu(w)\} &= (z-w)^{\lambda\mu} \left\{ \omega_{\lambda+\mu}(w) + \lambda : \partial\varphi(w)\omega_{\lambda+\mu}(w) : (z-w) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} [\lambda^2 : \partial\varphi(w)\partial\varphi(w)\omega_{\lambda+\mu} : + \lambda : \partial^2\varphi(w)\omega_{\lambda+\mu}(w) :] (z-w)^2 + \dots \right\} \end{aligned}$$

Démonstration. En appliquant $\omega_\lambda(z)$ sur l'état de plus haut poids $|\mu\rangle = e^{\mu\varphi_0}$ correspondant au champ $\omega_\mu(w)$, on obtient

$$\omega_\lambda(z) |\mu\rangle = \omega_\lambda(z) e^{\mu\varphi_0} |0\rangle = e^{\lambda\varphi_0} e^{\lambda a_0 \ln z} \left(\prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{\lambda}{n} a_{-n} z^n} e^{-\frac{\lambda}{n} a_n z^{-n}} \right) e^{\mu\varphi_0} |0\rangle$$

Puisque, $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $[\varphi_0, a_{-n}] = 0$, il s'ensuit que, par l'identité de Leibniz,

$$\left[e^{\lambda\varphi_0}, e^{\frac{\lambda}{n} a_{-n} z^n} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \left(\frac{\lambda}{n} z^n \right)^l \frac{1}{l!} [\varphi_0^k, a_{-n}^l] = 0$$

Ainsi, en considérant cette relation et l'équation 5.17, on parvient à l'expression

$$\omega_\lambda(z) |\mu\rangle = \left(\prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{\lambda}{n} a_{-n} z^n} \right) e^{\lambda\varphi_0} e^{\lambda a_0 \ln z} e^{\mu\varphi_0} \prod_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\lambda}{n} a_n z^{-n}} |0\rangle \stackrel{1}{=} \left(\prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{\lambda}{n} a_{-n} z^n} \right) e^{\lambda\varphi_0} e^{\lambda a_0 \ln z} e^{\mu\varphi_0} |0\rangle$$

où l'équation 5.16 a été utilisée pour l'égalité 1. Effectuons maintenant certains calculs. Tout d'abord, étant donné que²³

$$[a_0, e^{\mu\varphi_0}] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} [a_0, \varphi_0^k] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} k \varphi_0^{k-1} = \mu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!} \varphi_0^{k-1} = \mu e^{\mu\varphi_0},$$

on a, selon la démarche consignée à l'annexe D, $\forall m \in \mathbb{N}$,

$$[a_0^m, e^{\mu\varphi_0}] = e^{\mu\varphi_0} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m}{j} \mu^{m-j} a_0^j$$

23. L'expression utilisée pour $[a_0, \varphi_0^k]$ peut être aisément démontrée par induction. En effet, $[a_0, \varphi_0] = 1$ et, supposant $[a_0, \varphi_0^k] = k\varphi_0^{k-1}$ pour un certain $k \geq 1$, on a $[a_0, \varphi_0^{k+1}] = \varphi_0[a_0, \varphi_0^k] + [a_0, \varphi_0]\varphi_0^k = (k+1)\varphi_0^k$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 e^{\lambda a_0 \ln z} e^{\mu \varphi_0} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \ln^k z}{k!} a_0^k e^{\mu \varphi_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \ln^k z}{k!} \left([a_0^k, e^{\mu \varphi_0}] + e^{\mu \varphi_0} a_0^k \right) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \ln^k z}{k!} e^{\mu \varphi_0} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \mu^{k-j} a_0^j + a_0^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \ln^k z}{k!} e^{\mu \varphi_0} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \mu^{k-j} a_0^j \\
 &\stackrel{1}{=} e^{\mu \varphi_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \ln^k z}{k!} (\mu + a_0)^k = e^{\mu \varphi_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda \ln z (\mu + a_0))^k}{k!} = e^{\mu \varphi_0} e^{\lambda \ln z (\mu + a_0)} \stackrel{2}{=} e^{\mu \varphi_0} e^{\lambda \mu \ln z} e^{\lambda a_0 \ln z}
 \end{aligned}$$

où, à l'égalité 1, le théorème binomial de Newton a été utilisé et où, à l'égalité 2, la formule de Baker-Campbell-Hausdorff a été employée. Finalement,

$$\begin{aligned}
 \omega_\lambda(z) |\mu\rangle &= \left(\prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{\lambda}{n} a_{-n} z^n} \right) e^{\lambda \varphi_0} e^{\lambda a_0 \ln z} e^{\mu \varphi_0} |0\rangle = \left(\prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{\lambda}{n} a_{-n} z^n} \right) e^{\lambda \varphi_0} e^{\mu \varphi_0} e^{\lambda \mu \ln z} e^{\lambda a_0 \ln z} |0\rangle \\
 &\stackrel{1}{=} \left(\prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{\lambda}{n} a_{-n} z^n} \right) e^{\lambda \mu \ln z} e^{(\lambda + \mu) \varphi_0} |0\rangle \stackrel{2}{=} z^{\lambda \mu} \exp \left(\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{n} z^n \right) |\lambda + \mu\rangle \\
 &= z^{\lambda \mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{n} z^n \right)^k |\lambda + \mu\rangle = z^{\lambda \mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \sum_{n_1, \dots, n_k=1}^{\infty} \frac{a_{-n_1} \dots a_{-n_k}}{n_1 \dots n_k} z^{n_1 + \dots + n_k} |\lambda + \mu\rangle \\
 &= z^{\lambda \mu} \left\{ 1 + z \lambda a_{-1} + \frac{1}{2} z^2 (\lambda^2 a_{-1}^2 + \lambda a_{-2}) + \dots \right\} |\lambda + \mu\rangle
 \end{aligned}$$

où, à l'égalité 1, l'équation 5.16 a été utilisée et où la formule de Baker-Campbell-Hausdorff a aussi été considérée pour les égalités 1 et 2. De cette expression, il est possible d'obtenir l'expansion en produit d'opérateurs à un ordre arbitraire en utilisant la correspondance état-champ. On obtient alors²⁴ directement le résultat désiré. \square

La dernière étape, avant la résolution explicite du boson libre, correspond à la détermination exacte des relations de conjugaison entre champs par l'insertion de l'expansion de la proposition précédente dans un corrélateur à deux champs primaires. On obtient, au premier ordre,

$$\langle 0 | \omega_\lambda(z) \omega_\mu(w) | 0 \rangle = (z - w)^{\lambda \mu} \langle 0 | \omega_{\lambda + \mu} | 0 \rangle \stackrel{1}{=} \delta_{\lambda + \mu = 0} (z - w)^{\lambda \mu} = \delta_{\lambda + \mu = 0} \frac{1}{(z - w)^{\lambda^2}} \quad (5.18)$$

où, à l'égalité 1, le fait que le seul corrélateur non-nul à un champ primaire est celui du champ identité ($\Omega = \omega_0$) a été utilisé. Ainsi, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\omega_\lambda^*(z) = \omega_{-\lambda}(z)$. Il est à noter que ce résultat est cohérent avec l'équation 5.13 car $L_0 |\lambda\rangle = \frac{1}{2} \lambda^2 |\lambda\rangle$ (voir page 28) et $\omega_\lambda(z)$ est donc associé à la valeur $h = \frac{1}{2} \lambda^2$ de L_0 .

Le calcul requis est alors direct. En effet, puisque les champs dans un corrélateurs sont implicitement radialement ordonnés, au premier ordre,

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | \omega_{\lambda_1}(z_1) \omega_{\lambda_2}(z_2) \omega_{\lambda_3}(z_3) | 0 \rangle &= \langle 0 | \mathcal{R} \{ \omega_{\lambda_1}(z_1) \omega_{\lambda_2}(z_2) \} \omega_{\lambda_3}(z_3) | 0 \rangle = (z_1 - z_2)^{\lambda_1 \lambda_2} \langle 0 | \omega_{\lambda_1 + \lambda_2}(z_2) \omega_{\lambda_3}(z_3) | 0 \rangle \\
 &= (z_1 - z_2)^{\lambda_1 \lambda_2} \delta_{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0} \frac{1}{(z_2 - z_3)^{\lambda_3^2}} \quad \text{selon l'équation 5.18}
 \end{aligned}$$

De plus, selon l'équation 5.15, au premier ordre,

$$\langle 0 | \omega_{\lambda_1}(z_1) \omega_{\lambda_2}(z_2) \omega_{\lambda_3}(z_3) | 0 \rangle = \frac{C_{123}}{(z_1 - z_2)^{\frac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)} (z_2 - z_3)^{\lambda_3^2}} \quad \text{avec l'identification } h_i = \frac{1}{2} \lambda_i^2 \text{ discutée ci-haut.}$$

Ainsi, en comparant les dernières équations, on obtient le résultat annonçant la fin du processus de résolution du boson libre, c'est-à-dire

$$C_{123} = \delta_{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0} \quad (5.19)$$

où on a utilisé la relation

$$(z_1 - z_2)^{\lambda_1 \lambda_2} \delta_{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0} = (z_1 - z_2)^{-\frac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)^2)} \delta_{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0} = (z_1 - z_2)^{-\frac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)} \delta_{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0}$$

24. En n'oubliant pas le changement de variable $z \mapsto z - w$ requis par le fait qu'une expansion en produit d'opérateurs correspond toujours à une série de Laurent.

6 Conclusion

En conclusion, l'équation 5.18 permet d'écrire,

$$\langle 0 | \omega_{\lambda_1}(z_1) \omega_{\lambda_2}(z_2) \omega_{\lambda_3}(z_3) | 0 \rangle = \frac{\delta_{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0}}{(z_1 - z_2)^{\frac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)} (z_2 - z_3)^{\lambda_3^2}} \quad (6.1)$$

et, selon la discussion des pages 30 et 33, toutes les fonctions de corrélations (et ainsi toutes les observables) de la théorie du boson libre peuvent maintenant être calculées. Cependant, comme mentionné aux sections 4.2 et 4.3, puisque l'algèbre de symétrie du boson libre correspond à deux copies indépendantes de l'algèbre $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$ (i.e. au produit tensoriel $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C}) \otimes \widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$), les calculs effectués à partir de la section 5.1 auraient théoriquement dû être réalisés en double afin d'inclure le secteur antiholomorphe de résolution associé au champ $\bar{\partial}\varphi(\bar{z})$ et au tenseur $\bar{T}(\bar{z})$. Heureusement, tous les calculs présentés dans les sections précédentes sont aisément généralisables aux deux copies de $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$ et il est totalement rigoureux de considérer la théorie du boson libre comme étant explicitement résolue [3]. Par exemple, dans le secteur antiholomorphe, l'analogie de l'équation 5.5 est simplement [7]

$$\mathcal{R}\{\bar{T}(\bar{z})\phi(\bar{w})\} \sim \frac{\bar{h}}{(\bar{z} - \bar{w})^2} \phi(\bar{w}) + \frac{1}{\bar{z} - \bar{w}} \bar{\partial}\phi(\bar{w})$$

où $\phi(\bar{w})$ est un \mathfrak{Vir} -champ primaire quant aux modes du tenseur $\bar{T}(\bar{z})$ et \bar{h} est la valeur propre de l'état lui correspondant par rapport à \bar{L}_0 ²⁵. On obtient aussi une expression duale à celle de l'équation 6.1 pour les corrélateurs à trois champs dans le secteur antiholomorphe. Plus explicitement,

$$\langle 0 | \omega_{\bar{\lambda}_1}(\bar{z}_1) \omega_{\bar{\lambda}_2}(\bar{z}_2) \omega_{\bar{\lambda}_3}(\bar{z}_3) | 0 \rangle = \frac{\delta_{\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3 = 0}}{(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^{\frac{1}{2}(\bar{\lambda}_1^2 + \bar{\lambda}_2^2 + \bar{\lambda}_3^2)} (\bar{z}_2 - \bar{z}_3)^{\bar{\lambda}_3^2}}$$

où, $\forall i \in \{1, 2, 3\}$, $\omega_{\bar{\lambda}_i}(\bar{z}_i)$ est un $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$ -champ primaire quant aux modes du champ $\bar{\partial}\varphi(\bar{z})$ et λ_i est la valeur propre de l'état lui correspondant par rapport à a_0 ²⁶. Ainsi, on peut voir ce dernier résultat comme une justification *a posteriori* de la méthode qui a été suivie dans ce document ; à savoir l'oubli du secteur antiholomorphe de résolution en vue de donner plus de détails sur les techniques employées dans le secteur holomorphe.

De façon tout à fait générale [11], il est possible de définir une théorie conforme en deux dimensions comme un \mathfrak{Vir} -module

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{I}} (V_{h_\alpha} \otimes V_{\bar{h}_\alpha})$$

où $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ et où, $\forall \alpha \in \mathcal{I}$, V_{h_α} et $V_{\bar{h}_\alpha}$ sont des \mathfrak{Vir} -modules de Verma de plus haut poids²⁷ $h_\alpha \in \mathbb{R}$. Or, dans ce cas, \mathcal{V} doit remplir certaines conditions supplémentaires dont entre autres :

1. $\exists! \alpha \in \mathcal{I}$ tel que $h_\alpha = \bar{h}_\alpha = 0$; c'est-à-dire qu'il existe un unique état de vide $|0\rangle \otimes |0\rangle \in V_0 \otimes V_0$ tel que $(L_0 \otimes \text{id})|0\rangle \otimes |0\rangle = 0 = (\text{id} \otimes L_0)|0\rangle \otimes |0\rangle$ et
2. Il existe une correspondance état-champ, des expansions en produit d'opérateurs et une conjugaison de champs primaires sur \mathcal{V} ;

Ainsi, une théorie conforme bidimensionnelle admet toujours une représentation de l'algèbre de Virasoro²⁸ et se décompose toujours en un secteur holomorphe $\{V_{h_\alpha}\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ et antiholomorphe $\{V_{\bar{h}_\alpha}\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$. Or, pour une théorie quelconque, ne décrivant pas forcément un boson libre sans masse et sans spin, les calculs sont généralement très compliqués et certaines méthodes utilisées dans ce document ne sont plus applicables. Par exemple, étant donné que la théorie de la représentation de l'algèbre \mathfrak{Vir} sur ses modules de Verma est substantiellement plus compliquée que celle de $\widehat{\mathfrak{gl}}(1, \mathbb{C})$, certaines expansions en produit d'opérateurs possèdent une infinité de termes singuliers et il s'avère ainsi généralement impossible de les écrire sous une forme fermée [7].

25. C'est-à-dire que $\phi(\bar{w})$ correspond à un état $|\phi\rangle$ qui est annihilé par \bar{L}_n (avec $n > 0$) et tel que $\bar{L}_0|\phi\rangle = \bar{h}|\phi\rangle$.

26. C'est-à-dire que $\omega_{\bar{\lambda}_i}(\bar{z}_i)$ correspond à un état $|\bar{\lambda}_i\rangle$ qui est annihilé par \bar{a}_n (avec $n > 0$) et tel que $\bar{a}_0|\bar{\lambda}_i\rangle = \bar{\lambda}_i|\bar{\lambda}_i\rangle$.

27. C'est-à-dire que V_{h_α} et $V_{\bar{h}_\alpha}$ sont construits à partir d'un état $|h_\alpha\rangle$ qui est un état propre de L_0 et qui est annihilé par tous les L_n avec $n > 0$.

28. Comme mentionné précédemment à la fin de la section 4.3.

Par ailleurs, pour les théories conformes en plus de deux dimensions, le formalisme des séries de Laurent s'écroule et il n'est plus possible de diviser les calculs en deux secteurs. L'algèbre de prédilection n'est alors plus \mathfrak{Vir} et, puisque le théorème intégral de Cauchy ne peut plus être utilisé, tous les termes réguliers des expansions en produit d'opérateurs doivent être conservés lors de la démarche de résolution. Ainsi, la majorité des théories conformes explicitement résolubles sont bidimensionnelles et, en général, seuls des résultats partiels sont accessibles quant aux théories de dimension supérieure.

Finalement, même si la théorie du boson libre en 2 dimensions est pour nous totalement résolue, les calculs ne sont pas complètement terminés. En effet, pour résoudre entièrement toutes les problématiques secondaires à cette théorie, il faudrait au moins obtenir l'expression des corrélateurs pour des champs arbitraires (pas nécessairement primaires) en tant que certaines sommes pondérées de fonctions de corrélations similaires à 6.1. D'autres concepts de la théorie conforme des champs, comme les algèbres de fusion, les algèbres de Verlinde, les groupes quantiques et les algèbres de tresses ; auraient aussi être pu introduits pour obtenir plus de détails sur la structure algébrique du boson libre.

Or, somme toute,

Tempus fugit et vinum expectans nobis

Références

- [1] L. Wittbauer & M. Dieterle. The pashé transition of the 2d-ising model. visité le 18 mars 2018, 2007.
- [2] B. Hall. *Lie groups, Lie algebras, and representations : an elementary introduction*, volume 222. Springer, 2015.
- [3] D. Ridout. An introduction to conformal field theory. University of Melbourne, 2013.
- [4] A.W. Knap. *Lie groups beyond an introduction*, volume 140. Springer Science & Business Media, 2013.
- [5] Frank W Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, volume 94. Springer Science & Business Media, 2013.
- [6] I. Assem. *Algèbres et modules*. Masson, 1997.
- [7] P. Francesco, P. Mathieu & D. Sénéchal. *Conformal field theory*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [8] P. Mathieu. Notes de cours : Méthodes mathématiques en physique. Université Laval, 2017.
- [9] L. Marleau. Notes de cours : Physique des particules. Université Laval, 2018.
- [10] M. E. Peskin, & D. V. Schroeder. *Quantum field theory*. 1995.
- [11] M. Schottenloher. *A mathematical introduction to conformal field theory*, volume 759. Springer, 2008.

A Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier M. Yvan Saint-Aubin pour leur avoir conseillé la lecture de [3] et avoir répondu à certaines de leur questions. D'autres remerciements vont à M. Patrick Desrosiers et M. Jean-François Fortin pour certains conseils quant aux références à utiliser et pour plusieurs discussions pertinentes. Finalement, les auteurs remercient aussi M. Pierre Mathieu de M. Michael Lau pour leurs cours de *Méthodes mathématiques* et de *Théorie de Lie* derrière lesquels se cachent l'essentiel des outils mathématiques mis à profit dans ce document.

B Table de notation

La notation utilisée dans notre document qui n'est pas totalement standard en physique théorique ou qui n'est pas défini au sein du texte est explicitée ci-dessous. Le symbole \equiv dénote la définition.

$\sigma_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	(Matrices de Pauli)
\circ	(Composition d'applications)
\equiv	(Est égal après calcul à)
T	(Transposition)
$\bar{\alpha}$	(α vu dans le secteur antiholomorphe)
β^*	(Conjugué complexe de $\beta \in \mathbb{C}$)
$\mathbb{N} \equiv \{1, 2, 3, \dots\}$; c'est-à-dire $0 \notin \mathbb{N}$	(Entiers naturels)
Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathbb{Z}_{\geq n} \equiv \{m \in \mathbb{Z} m \geq n\}$	(Entiers minorés)
$\emptyset \equiv \{\}$	(Ensemble vide)
Soient \mathbb{F} un corps et E un ensemble, alors $\text{span}_{\mathbb{F}}\{E\}$ est l'ensemble des combinaisons \mathbb{F} -linéaires d'éléments de E .	(Espace vectoriel engendré)
\oplus	(Somme directe de modules)
\otimes	(Produit tensoriel)
Soit E un ensemble, alors $ E $ est sa cardinalité	(Cardinalité)
$\delta_{i=j}, \delta_{ij}, \delta_j^i$	(Variantes du symbole de Kronecker)
$\mathcal{C}^\omega(\mathbb{C})$	(Fonctions analytiques sur \mathbb{C})
Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie. Le \mathfrak{g} -module trivial $\{0_{\mathfrak{g}}\}$ est noté 0 .	(Module trivial)
$\mathbb{S}^1 \equiv \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 x^2 + y^2 = 1\}$	(Cercle unité)
spec	(Spectre d'un opérateur linéaire)
id	(Opérateur identité)

C Notions théoriques supplémentaires

Certaines notions d'analyse complexe utilisées dans ce document sont explicitées ci-dessous. La référence principalement utilisée pour ces notions est [8].

C.1 Analyticité

Théorème C.1 (Équations de Cauchy-Riemann). *Soit $f(z)$ une fonction complexe. Utilisons la notation $f(z) = P(z) + iQ(z)$, où $P(z)$ est la partie réelle de $f(z)$ et $Q(z)$ sa partie imaginaire. Alors, pour que $f(z)$ soit différentiable au sens complexe en $z_0 = x_0 + iy_0$, il faut et il suffit*

- qu'elle soit différentiable au sens réel en z_0 ;
- qu'elle vérifie les équations de Cauchy-Riemann.

Ces dernières équations peuvent s'écrire sous les formes équivalentes suivantes.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) &= i \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \\ \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \bar{\partial} f(z_0) &= 0 \end{aligned}$$

avec l'opérateur $\bar{\partial} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$. On dit alors que f est analytique (ou holomorphe).

C.2 Intégration complexe

Théorème C.2 (Théorème de Cauchy-Goursat). *Si $f(z)$ est analytique à l'intérieur d'une région R simplement connexe et sur la courbe \mathcal{C} délimitant cette région, alors*

$$\oint_{\partial R} f(z) dz = 0$$

Le théorème précédent se généralise aisément aux régions multiplement connexes. Le lecteur intéressé est référé à [8].

Théorème C.3 (Théorème intégral de Cauchy). *Si $f(z)$ est analytique sur la courbe fermée \mathcal{C} ainsi que dans la région R y étant circonscrite et que $z_0 \in R$, alors, $\forall n \in \mathbb{N}$,*

$$\left(\frac{d^n}{dz^n} f(z) \right) \Big|_{z=z_0} = n! \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \frac{dz}{2\pi i}$$

Selon les théorèmes ci-haut, il n'y a aucun mal à déformer les contours d'intégrations dans les régions où l'intégrande est analytique.

C.3 Séries de Laurent

Théorème C.4 (Laurent). *Toute fonction $f(z)$ analytique dans une région annulaire R centrée sur z_0 de rayon interne r_1 et de rayon externe r_2 (i.e. R est définie comme $r_1 < |z - z_0| < r_2$) peut être développée selon*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z_0)(z - z_0)^{-n-1}$$

où les coefficients du développement sont donnés par le théorème des résidus de Cauchy, c'est-à-dire,

$$a_n(z_0) = \oint_{\mathcal{C}} f(z)(z - z_0)^n \frac{dz}{2\pi i}$$

pour tout contour fermé \mathcal{C} dans R entourant z_0 . Le domaine de convergence de cette série est la région annulaire centrée en z_0 , de surface maximale, à l'intérieur de laquelle la fonction est en tout point analytique.

Une série de Laurent peut être scindée en deux parties, la première étant la partie analytique et la deuxième, la partie principale.

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n \leq -1} a_n(z_0)(z - z_0)^{-n-1}}_{\text{Partie analytique}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_0)(z - z_0)^{-n-1}}_{\text{Partie principale}}$$

Clairement, tous les termes de la partie principale présentent un pôle en $z = z_0$.

D Calculs supplémentaires

Dans cette section, certains calculs, trop longs pour avoir été effectués au sein du texte, sont consignés.

Calculs relatif à la proposition 5.3.

$$\begin{aligned}
\partial\varphi(z_1) : \partial\varphi(z_2)\partial\varphi(z_3) : &= \left(\partial\varphi_-(z_1) + \partial\varphi_+(z_1)\right) : \partial\varphi(z_2)\partial\varphi(z_3) : \\
&= : \partial\varphi_-(z_1)\partial\varphi(z_2)\partial\varphi(z_3) : + \partial\varphi_+(z_1) : \partial\varphi(z_2)\partial\varphi(z_3) : \\
&= : \partial\varphi_-(z_1)\partial\varphi(z_2)\partial\varphi(z_3) : + \partial\varphi_+(z_1)\partial\varphi_-(z_2)\partial\varphi(z_3) + \partial\varphi_+(z_1)\partial\varphi(z_3)\partial\varphi_+(z_2) \\
&= : \partial\varphi_-(z_1)\partial\varphi(z_2)\partial\varphi(z_3) : + \partial\varphi_-(z_2)\partial\varphi_+(z_1)\partial\varphi(z_3) + \frac{1}{(z_1 - z_2)^2}\partial\varphi(z_3) \\
&\quad + \partial\varphi_+(z_1)\partial\varphi_-(z_3)\partial\varphi_+(z_2) + \partial\varphi_+(z_1)\partial\varphi_+(z_3)\partial\varphi_+(z_2) \\
&= : \partial\varphi_-(z_1)\partial\varphi(z_2)\partial\varphi(z_3) : + \partial\varphi_-(z_2)\partial\varphi_+(z_1)\partial\varphi_-(z_3) + \partial\varphi_-(z_2)\partial\varphi_+(z_1)\partial\varphi_+(z_3) \\
&\quad + \frac{1}{(z_1 - z_2)^2}\partial\varphi(z_3) + \partial\varphi_+(z_1)\partial\varphi_-(z_3)\partial\varphi_+(z_2) + \partial\varphi_+(z_1)\partial\varphi_+(z_3)\partial\varphi_+(z_2) \\
&= : \partial\varphi_-(z_1)\partial\varphi(z_2)\partial\varphi(z_3) : + \partial\varphi_-(z_2)\left(\partial\varphi_-(z_3)\partial\varphi_+(z_1) + [\partial\varphi_+(z_1), \partial\varphi_-(z_3)]\right) \\
&\quad + \frac{1}{(z_1 - z_2)^2}\partial\varphi(z_3) + \left(\partial\varphi_-(z_3)\partial\varphi_+(z_1) + [\partial\varphi_+(z_1), \partial\varphi_-(z_3)]\right)\partial\varphi_+(z_2) \\
&\quad + \partial\varphi_+(z_3)\partial\varphi_+(z_1)\partial\varphi_+(z_2) + \partial\varphi_-(z_2)\partial\varphi_+(z_3)\partial\varphi_+(z_1) \\
&= : \partial\varphi_-(z_1)\partial\varphi(z_2)\partial\varphi(z_3) : + \partial\varphi_-(z_2)\partial\varphi(z_3)\partial\varphi_+(z_1) + \frac{1}{(z_1 - z_2)^2}\partial\varphi(z_3) \\
&\quad + \partial\varphi(z_3)\partial\varphi_+(z_1)\partial\varphi_+(z_2) + \frac{1}{(z_1 - z_3)^2}\partial\varphi(z_2) \\
&= : \partial\varphi_-(z_1)\partial\varphi(z_2)\partial\varphi(z_3) : + \partial\varphi_-(z_2)\partial\varphi(z_3)\partial\varphi_+(z_1) + \frac{1}{(z_1 - z_2)^2}\partial\varphi(z_3) \\
&\quad + \partial\varphi(z_3)\partial\varphi_+(z_2)\partial\varphi_+(z_1) + \frac{1}{(z_1 - z_3)^2}\partial\varphi(z_2) \\
&= : \partial\varphi_-(z_1)\partial\varphi(z_2)\partial\varphi(z_3) : + : \partial\varphi(z_2)\partial\varphi(z_3) : \partial\varphi_+(z_1) \\
&\quad + \frac{1}{(z_1 - z_2)^2}\partial\varphi(z_3) + \frac{1}{(z_1 - z_3)^2}\partial\varphi(z_2) \\
&= : \partial\varphi_-(z_1)\partial\varphi(z_2)\partial\varphi(z_3) : + : \partial\varphi(z_2)\partial\varphi(z_3)\partial\varphi_+(z_1) : \\
&\quad + \frac{1}{(z_1 - z_2)^2}\partial\varphi(z_3) + \frac{1}{(z_1 - z_3)^2}\partial\varphi(z_2) \\
&= : \partial\varphi(z_1)\partial\varphi(z_2)\partial\varphi(z_3) : + \frac{1}{(z_1 - z_2)^2}\partial\varphi(z_3) + \frac{1}{(z_1 - z_3)^2}\partial\varphi(z_2)
\end{aligned}$$

Calculs relatifs à la proposition 5.5

On sait que $[a_0, e^{\mu\varphi_0}] = \mu e^{\mu\varphi_0}$ et on veut démontrer que, $\forall m \in \mathbb{N}$, $[a_0^m, e^{\mu\varphi_0}] = e^{\mu\varphi_0} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m}{j} \mu^{m-j} a_0^j$.

Soit donc $m \in \mathbb{N}$ tel que l'énoncé est vrai. Alors,

$$\begin{aligned}
[a_0^{m+1}, e^{\mu\varphi_0}] &= a_0[a_0^m, e^{\mu\varphi_0}] + [a_0, e^{\mu\varphi_0}]a_0^m = a_0 e^{\mu\varphi_0} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m}{j} \mu^{m-j} a_0^j + \mu e^{\mu\varphi_0} a_0^m \\
&= \left([a_0, e^{\mu\varphi_0}] + e^{\mu\varphi_0} a_0 \right) \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m}{j} \mu^{m-j} a_0^j + \mu e^{\mu\varphi_0} a_0^m \\
&= e^{\mu\varphi_0} \left\{ \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m}{j} \mu^{m-j+1} a_0^j + \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m}{j} \mu^{m-j} a_0^{j+1} + \mu a_0^m \right\} \\
&= \mu e^{\mu\varphi_0} \left\{ \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m}{j} \mu^{m-j} a_0^j + \sum_{j=1}^m \binom{m}{j-1} \mu^{m-j} a_0^j + a_0^m \right\} \\
&\stackrel{1}{=} \mu e^{\mu\varphi_0} \left\{ \mu^m + \sum_{j=1}^{m-1} \left[\binom{m}{j} + \binom{m}{j-1} \right] \mu^{m-j} a_0^j + \binom{m}{m-1} a_0^m + \binom{m}{m} a_0^m \right\} \\
&= \mu e^{\mu\varphi_0} \left\{ \mu^m + \sum_{j=1}^{m-1} \binom{m+1}{j} \mu^{m-j} a_0^j + \binom{m+1}{m} a_0^m \right\} = \mu e^{\mu\varphi_0} \sum_{j=0}^m \binom{m+1}{j} \mu^{m-j} a_0^j \\
&= e^{\mu\varphi_0} \sum_{j=0}^m \binom{m+1}{j} \mu^{m+1-j} a_0^j
\end{aligned}$$

et l'énoncé est donc démontré $\forall m \in \mathbb{N}$ par le principe d'induction mathématique. Il est à noter que l'égalité 1 correspond à l'utilisation de l'identité de Pascal sur les coefficients binomiaux.