



La renormalisation

Une histoire vivante

Victor Duchesne
111 131 580

Travail présenté à
M. Luc. **MARLEAU**

En date du
17 avril 2018

Table des matières

Introduction	1
Première partie	2
1 Idées, concepts et humanité	2
1.1 Historique et amorce	2
1.2 Fondements physiques	3
1.3 Une loi de la nature?	4
Deuxième partie	6
2 Du vide à l'infini	6
2.1 Théorie quantique des champs	6
2.2 Théorie des perturbations, l'approche de Dyson	7
2.3 Règles et diagrammes de Feynman	11
2.4 Le problème	15
Troisième partie	16
3 De l'infini à au-delà	17
3.1 Encore Wick	17
3.2 La régularisation de Pauli-Villars	19
3.3 Régularisation dimensionnelle	20
3.4 Une procédure de renormalisation	22
3.5 L'équation du groupe	26
4 Conclusion	28

The electron is too simple of a thing for the question of the laws governing its structure to arise.

- Paul Dirac

Introduction

Les sages avaient une peur intrinsèque du feu. Ils avaient appris, à la dure, à respecter son caractère sauvage, brûlant forêt et tuant la vie, jusqu'à ce qu'une bande de courageux se mette à l'étudier. Ils trouvèrent que cet élément dangereux pouvait s'avérer utile à la communauté, s'ils apprenaient à le dompter. Les sages apprirent alors à maîtriser le feu, leur assurant nourriture et protection. Aussi il devient nécessaire de contrôler et de respecter le feu, car sans surveillance, il pouvait détruire tout leur labeur.

Les infinités apparaissant en théorie quantique des champs sont le feu des physiciens. Au début, ils en avaient peur, au point d'envisager l'abandon de la théorie au profit d'une autre. Puis, quelques braves décidèrent d'étudier leur provenance. Après moult efforts, ils proposèrent une manière de les dompter : *la renormalisation*. Cette procédure permet d'éliminer systématiquement les divergences apparaissant dans les prédictions de la théorie quantique des champs, rendant ces dernières prévisibles et contrôlables. Ce texte vise à introduire la procédure de renormalisation, ses causes, ses applications et ses conséquences. D'abord, une discussion approfondie des concepts philosophiques liés à la renormalisation est proposée, suivie d'une présentation exhaustive du mécanisme engendrant l'apparition des infinités et terminant avec l'application de la technique sur une théorie d'interaction scalaire.

1 Idées, concepts et humanité

1.1 Historique et amorce

La renormalisation, telle qu'on la connaît aujourd'hui, reste un sujet étrange et polarisant. Ce principe est né au lendemain de la Deuxième Guerre mondiale de l'esprit fertile de plusieurs physiciens comme Kramers (1947), Bethe (1947), Lewis (1948), Schwinger (1948), Tomogana (1946) et Feynman (1948), dans le cadre de la théorie quantique des champs. Cette théorie existait déjà depuis 15 ans, mais elle était peu utilisée. Le problème provenait de sa tendance à prédire, de manière systématique, des résultats infinis. Les physiciens, en tentant de contourner le problème, ont donc élaboré la procédure de renormalisation qui s'est avérée extrêmement efficace. Cette procédure a propulsé la QFT¹ au sommet des théories physiques en termes d'accord expérimental et de précision numérique. Cependant, la renormalisation introduit plusieurs ambiguïtés conceptuelles dans notre compréhension de la physique fondamentale. Son existence est véritablement un couteau à double tranchant. Alors que la QFT possède des fondations conceptuelles solides, elle se révèle incapable de fournir des prédictions valides. D'un autre côté, la théorie quantique des champs renormalisée semble introduire des problèmes philosophiques, mais permet de faire des prédictions valides.

La théorie quantique des champs a pour objectif de décrire les interactions entre les particules fondamentales de la nature. À la base, la QFT se veut une extension de la mécanique quantique standard, à la sauce relativiste. Elle est construite à partir d'opérateurs, d'équations du mouvement, de relations de commutations et d'anticommutations et d'un espace d'Hilbert de vecteurs d'états. Elle respecte aussi le principe de superposition. Ainsi, elle est fondamentalement probabiliste, tout comme la mécanique quantique. Le principe de superposition est l'élément qui nous intéresse. Il est notre porte d'entrée vers la procédure de renormalisation.

Ce dernier consiste à supposer l'état de la particule comme une superposition linéaire de tous les états possibles dans lesquelles la particule pourrait se trouver. Ainsi, pour calculer l'état final après une interaction, l'intéressé a besoin de sommer tous les états finaux possibles de cette particule, ce qui l'amène à sommer toutes les manières possibles qu'une particule atteigne un état final précis. La particule peut, par exemple, se propager librement, ou interagir. Dans tous les cas, chacune des manières d'atteindre l'état final est pondérée par une amplitude de probabilité. La façon standard de procéder consiste à se servir des diagrammes de Feynman et donc, de la théorie des perturbations pour effectuer le calcul. Les interactions sont considérées comme des petites perturbations à la théorie de propagation libre. Cependant, au moment de l'intégration, ces petites perturbations

1. De l'anglais Quantum Field Theory

initiales divergent², car on doit sommer (ou intégrer) sur la totalité des états intermédiaires possibles (comme l'émission et l'absorption d'un photon virtuel avec une énergie inconnue). Ces états peuvent avoir une énergie arbitrairement petite ou arbitrairement grande. Même si l'amplitude de probabilité associée à ces états est faible, il faut les considérer. C'est ce qui posait problème. La procédure de renormalisation permet d'éliminer ces infinis en les absorbant dans les constantes initiales du problème et en introduisant une coupure et un paramètre d'échelle à notre théorie. Ces nouvelles constantes sont dites *renormalisées*. De cette manière, on peut obtenir des prédictions utiles et viables à l'échelle d'intérêt.

1.2 Fondements physiques

Afin de se donner une idée de la façon dont ces constantes sont renormalisées, considérons une collision entre deux électrons. Avant l'expérience, il est possible de mesurer la masse de ces deux électrons, ces valeurs correspondant à leur *masse au repos*. Cependant, lorsqu'ils sont accélérés près de la vitesse de la lumière, la mesure de leur masse respective ne correspond plus à la valeur de leur masse initiale. Ainsi, il semble exister deux types de masses pour un objet. En relativité, ce sont les masses au repos et relativiste. Dans le processus de renormalisation, ce sont les *masses à nue* et effective (ou physique). La masse à nue serait la masse de la particule lorsqu'elle n'interagit avec rien, tandis que la masse physique proviendrait de l'interaction de cette particule avec un système. L'idée de la renormalisation est d'absorber les infinités dans la masse à nue, inobservable, de la particule, rendant la masse physique finie. Pour ce faire, il faut introduire une constante de coupure, permettant de temporairement résoudre l'intégrale divergente. Ensuite, la masse à nue est paramétrisée de sorte que sa contribution annule précisément celle de la coupure. La relation entre la masse à nue, la coupure et la masse physique est fixée par une des *équations du groupe de renormalisation*. Ces équations prennent aussi en compte un paramètre d'échelle, qui spécifie comment changer la contribution de chacun des termes pour une échelle énergétique donnée, permettant ainsi de faire des prédictions sur les valeurs des constantes à n'importe quelle énergie.

Cette idée d'introduire une coupure, ou une limite lors de la renormalisation peut sembler être un artifice mathématique utile pour évaluer l'amplitude de probabilité d'une interaction. En vérité, c'est une procédure courante et acceptée qui possède une justification conceptuelle intéressante. D'un point de vue philosophique, toutes les théories physiques présentent une limite à laquelle elles ne sont plus valides. La dynamique newtonienne décrit adéquatement le mouvement des particules soumises à la gravité, mais ces prédictions sont erronées à l'échelle atomique ou lorsque les vitesses des objets approchent la vitesse de la lumière. L'électromagnétisme offre une description

2. Ce sujet sera traité à la section 2

convenable à l'échelle atomique et macroscopique, mais ne parvient pas à prédire les résultats d'interactions subatomiques. Lorsque la limite du domaine de validité d'une théorie est approchée, une nouvelle théorie, complémentaire à l'ancienne, la remplace. Par exemple, l'électromagnétisme, à l'échelle subatomique, est remplacé par sa cousine, l'électrodynamique quantique. D'ailleurs, il est intéressant de mentionner que le cas électromagnétique possède une similarité avec le processus de renormalisation qui n'est certainement pas étranger à la manière dont cette technique a été développée.

Aujourd'hui, l'électron est considéré comme une particule élémentaire qui n'a pas de structure sous-jacente. Cette idée permet de négliger les dimensions de l'électron et de le considérer classiquement comme un point. C'est une des bases de la théorie quantique des champs. Ce principe a été proposé par Frenkel en 1925 pour résoudre les problèmes associés à l'électron de Poincaré. Celui-ci avait proposé un électron sphérique possédant un rayon r constant qui se situerait au point d'équilibre entre la force de Coulomb et une autre force de nature non électromagnétique. La masse de l'électron dépend ainsi de l'interaction et du couplage entre ces deux forces. Ce raisonnement possède des ressemblances certaines avec les principes derrière le processus de renormalisation. La masse de l'électron a, en partie, une origine non électromagnétique, et l'interaction entre ces deux forces mène à la masse observable de l'électron. Mais, revenons au modèle de Frenkel. En accord avec l'électromagnétisme, le potentiel électrique varie $V \propto 1/r$. Ainsi, à $r \rightarrow 0$, le potentiel diverge linéairement. C'est la coupure à laquelle la théorie n'est plus valide. L'électromagnétisme constitue un bel exemple d'une théorie physique qui est acceptée alors qu'elle présente des divergences aux limites de son domaine de validité.

1.3 Une loi de la nature ?

Tel que mentionné plus tôt, le processus de renormalisation a propulsé la théorie quantique des champs au sommet de sa gloire. Sans la renormalisation, cette théorie aurait sans doute été abandonnée par les physiciens. L'anglais Freeman Dyson qui travaillait à l'époque sur l'électrodynamique quantique, une théorie sous-jacente à la QFT (bien qu'elle ait été développée avant celle-ci), s'est intéressé au processus de renormalisation. Il a été en mesure de démontrer que la QED³ était une *théorie renormalisable*. On entend par là que les divergences à tous les ordres de grandeur peuvent être absorbées par un nombre fini de constantes de couplage. Le résultat est une théorie renormalisée qui est bien définie et qui prédit des résultats cohérents avec l'expérience.

Suite à cette preuve, les physiciens en sont venus à se demander si la renormalisation était une caractéristique fondamentale de notre Univers. En d'autres mots, est-ce que la nature doit être

3. De l'anglais *Quantum Electrodynamics*

décrite par des théories renormalisables? Cette question a soulevé bien des débats sans jamais mener à un consensus.

Certains physiciens comme Bethe suggéraient que oui. Ils justifiaient leur position en s'appuyant sur le pouvoir prédictif des théories renormalisées. Comme la physique a pour objectif de formuler des théories qui possèdent un puissant pouvoir prédictif, les postulats d'une théorie doivent contenir un nombre fini de paramètres. Comme l'a démontré Dyson, seules les théories renormalisables possèdent cette caractéristique de manière systématique. Bien que les divergences associées aux théories non-renormalisables puissent être absorbées dans les constantes à nue, il a été démontré qu'il serait nécessaire d'inclure un nombre infini de ces paramètres; conclusion, on n'est pas plus avancé.

Il existe aussi une explication plus intuitive pour justifier la renormalisation. L'imposition d'une coupure sert à supprimer les contributions à haute énergie, donc à haute fréquence ou à petite distance. Or, rien ne laisse supposer que la théorie est valide à très haute énergie ou à très courte distance, deux régions, de toute façon, insondables expérimentalement. Il est fort possible que ces domaines soient régis par une autre physique, une autre théorie. Ainsi, les divergences dites ultraviolettes⁴ proviennent d'endroits où la théorie n'est peut-être plus valide. Il est donc naturel de les négliger. Cet argument rejoint celui concernant la divergence à très courte distance du potentiel électrique.

D'autres physiciens n'étaient pas du même avis. Par exemple, il a été démontré qu'une théorie de la gravité quantique n'est pas renormalisable. Cela pose un problème majeur dans la recherche d'une théorie du tout. Cette dernière ne serait pas possible si la renormalisation était vraiment une loi de la nature. Cette perspective est clairement refusée par les théoriciens qui mettent toujours beaucoup d'efforts dans la recherche d'une théorie de la gravité quantique. La relativité générale est aussi une théorie non renormalisable qui fonctionne pourtant très bien. Cependant, ces arguments contre la renormalisation ont été adressés par Kenneth Wilson qui a changé la perception du processus de renormalisation. Aujourd'hui, plutôt que d'être vue comme une technique mathématique qui règle les problèmes des infinités, la renormalisation est simplement considérée comme la paramétrisation de la dépendance de la physique à basse énergie sur la physique à haute énergie, à travers les équations du groupe de renormalisation. Ainsi, les théories non renormalisables comme celle de la relativité générale sont considérées comme des théories effectives à basse énergie, ce qui ne pose plus de problème.

4. Elles sont dites ultraviolettes, car elles sont associées aux grandes fréquences.

2 Du vide à l'infini

Cette section présente la provenance des divergences dans les prédictions de la théorie quantique des champs. D'abord, la QFT est brièvement introduite, suivie d'un développement en série perturbative, proposé en premier par Dyson, du modèle d'interaction ϕ^4 . Bien que l'approche de Feynman à l'aide de l'intégrale fonctionnelle est plus efficace pour présenter la renormalisation, cette approche est plus compliquée et arrive aux mêmes résultats que la série perturbative de Dyson. De plus, l'approche de ce dernier est davantage reliée à des calculs similaires en mécanique quantique. Ensuite, une approche intuitive des diagrammes de Feynman est développée et est reliée à la dérivation des règles de Feynman pour la théorie scalaire ϕ^4 . Finalement, ces règles sont appliquées pour démontrer que certaines divergences apparaissent pour les corrections aux ordres supérieurs à 2.

2.1 Théorie quantique des champs

La théorie quantique des champs propose de traiter les particules comme des excitations d'un champ. Elle permet donc de traiter efficacement les processus physiques où le nombre de particules n'est pas conservé, par exemple, l'annihilation électron-positron. Elle est basée sur les grands principes de la mécanique quantique et de la relativité, en particulier la localité. Historiquement, la théorie quantique des champs s'est développée comme une extension, ou une nouvelle approche, de la mécanique quantique relativiste. Cette dernière avait pour objectif de marier la mécanique quantique et la relativité restreinte. La première tentative a été faite par les physiciens Klein et Gordon. Ils ont simplement substitué l'énergie relativiste $E^2 = p^2 + m^2$ dans l'équation de Schrödinger,

$$H|\phi\rangle = E|\psi\rangle \Rightarrow H^2|\phi\rangle = (p^2 + m^2)|\phi\rangle \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2}|\phi\rangle = (-\nabla^2 + m^2)|\phi\rangle,$$

qui s'écrit généralement sous la forme :

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi(x) = 0.$$

Malheureusement, cette approche tomba à l'eau, car l'équation de Klein-Gordon, de par sa nature différentielle, permet des solutions avec une densité de probabilité négative, ce qui n'est certes pas souhaitable. Ce problème amena Dirac à formuler une autre équation

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\phi(x) = 0, \tag{1}$$

où les γ sont des matrices 4×4 définies comme

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \mathbf{1}. \quad (2)$$

Cette équation résout le problème associé à la densité de probabilité négative et mène à la prédiction des antiparticules. Cependant, cette équation n'est pas adaptée pour traiter des situations où le nombre de particules n'est pas conservé. C'est là que la QFT a été proposée. Elle est bâtie, entre autres, autour de densités lagrangiennes \mathcal{L} et de champs $\phi(x)$. Ces champs peuvent être vus comme une infinité d'oscillateurs harmoniques à chaque point de l'espace. La propagation d'une particule est modélisée comme étant l'excitation d'un oscillateur qui est transmise à l'oscillateur voisin. Ainsi, la dualité onde-particule de la mécanique quantique y est naturellement intégrée. De plus, ces oscillateurs peuvent être représentés, tout comme en mécanique quantique, par une combinaison d'opérateurs de création a^\dagger et d'annihilation a comme suit :

$$\phi(t_0, x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{E}} (ae^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}).$$

2.2 Théorie des perturbations, l'approche de Dyson

En général, il n'existe pas de solution exacte à une densité lagrangienne avec un terme d'interaction. Afin d'extraire quelque chose de ce lagrangien, il semble naturel d'attaquer le problème grâce à la puissance de la théorie des perturbations. Cette théorie est largement utilisée en physique atomique et en mécanique quantique afin de calculer l'effet de petites perturbations sur l'énergie du système perturbé. La manière de procéder consiste à séparer le lagrangien, ou de manière équivalente l'hamiltonien, en deux parties. La première partie est l'hamiltonien initial sans terme perturbatif H_0 . La deuxième partie H_{int} contient le terme perturbatif et est considérée petite.

$$H = H_0 + H_{\text{int}} \quad (3)$$

Il est possible de calculer les corrections à l'énergie en prenant le produit scalaire

$$\langle \Omega | H_{\text{int}} | \Omega \rangle \quad (4)$$

où $|\Omega\rangle$ représente l'état fondamental perturbé de la théorie à l'étude. De manière générale, $H_{\text{int}} \propto \lambda \phi(t, \vec{x})^n$ ou $\phi(t, \vec{x})$ est le champ vectoriel, ou scalaire, associé à une particule

$$\phi(t, \vec{x}) = e^{iH(t-t_0)} \phi(t_0, \vec{x}) e^{-iH(t-t_0)} \quad (5)$$

et λ est le couplage interactif. L'objectif de la théorie des perturbations est d'exprimer l'énergie associée aux perturbations en termes de l'énergie de l'hamiltonien non perturbé. Par analogie, le champ perturbé est exprimé en termes de celui non perturbé en prenant la limite $\lambda \rightarrow 0$. La définition du champ non perturbé est

$$\Phi(t, \vec{x}) = e^{iH_0(t-t_0)}\phi(t_0, \vec{x})e^{-iH_0(t-t_0)}, \quad (6)$$

de sorte qu'il est possible d'exprimer $\phi(t, \vec{x})$ comme

$$\begin{aligned} \phi(t, \vec{x}) &= e^{iH(t-t_0)}e^{-iH_0(t-t_0)}\Phi(t, \vec{x})e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)} \\ \phi(t, \vec{x}) &= U(t, t_0)^\dagger\Phi(t, \vec{x})U(t, t_0), \end{aligned} \quad (7)$$

où $U(t, t_0)$ est l'opérateur d'évolution

$$U(t, t_0) = e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)}. \quad (8)$$

C'est le même opérateur qu'implique l'équation de Schrödinger

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}U(t, t_0) &= e^{iH_0(t-t_0)}(H - H_0)e^{-iH(t-t_0)} \\ &= i\frac{\partial}{\partial t}U(t, t_0) = e^{iH_0(t-t_0)}(H_{\text{int}})e^{-iH(t-t_0)} \\ &= e^{iH_0(t-t_0)}(H_{\text{int}})e^{-iH_0(t-t_0)}e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)} \\ &= \mathcal{H}_{\text{int}}U(t, t_0), \end{aligned}$$

où $\mathcal{H}_{\text{int}} = e^{iH_0(t-t_0)}(H_{\text{int}})e^{-iH_0(t-t_0)}$ représente la relation entre les hamiltoniens H_{int} et H_0 . Cette transformation correspond au passage entre la représentation d'Heisenberg et la représentation des interactions. De cette solution, une forme équivalente de l'opérateur d'évolution exprimé en termes de \mathcal{H}_{int} devient évidente :

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= e^{-i\mathcal{H}_{\text{int}}(t-t_0)} \\ U(t, t_0) &= e^{-i\int_{t_0}^t dt_1 \mathcal{H}_{\text{int}}(t_1)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Cet opérateur pourra ainsi s'exprimer aisément en termes d'une série de Taylor d'une exponentielle autour de $\lambda = 0$,

$$U(t, t_0) = 1 - i\int_{t_0}^t dt_1 \mathcal{H}_{\text{int}}(t_1) - \frac{1}{2!}\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^d dt_2 \mathcal{H}_{\text{int}}(t_1)\mathcal{H}_{\text{int}}(t_2) + \dots, \quad (10)$$

ce qui facilite grandement le traitement perturbatif, car les termes sont séparés par ordre de grandeur de la perturbation initiale λ .

Ensuite, l'objectif est d'exprimer l'état fondamental perturbé $|\Omega\rangle$ en termes du niveau fondamental de l'hamiltonien non perturbé $|0\rangle$. Cela permettra ultimement d'exprimer les corrections en termes de

$$\langle 0|H_0|0\rangle = D_F(x - y),$$

la propagation libre de la particule. La procédure est similaire à celle adoptée en mécanique quantique. L'idée est de construire l'état $|\Omega\rangle$ en partant de l'état $|0\rangle$ et en le faisant évoluer dans le temps avec H tel que :

$$e^{iHt} |0\rangle = \sum_n e^{iE_n t} |n\rangle \langle n|0\rangle.$$

La série ci-dessus doit contenir, à un moment ou un autre, l'état $|\Omega\rangle$. Ainsi, cette série peut s'écrire comme

$$e^{iHt} |0\rangle = e^{-iE_\Omega t} |\Omega\rangle \langle \Omega|0\rangle + \sum_{n \neq \Omega} e^{iE_n t} |n\rangle \langle n|0\rangle \quad (11)$$

où $E_\Omega = \langle \Omega|H|\Omega\rangle$. Les termes $n \neq \Omega$ sont négligés en envoyant le temps à l'infini $t \rightarrow \infty(1 - i\epsilon)$ ⁵. En supposant que les énergies $E_n \leq E_\Omega$, alors l'exponentielle $e^{iE_n t}$ décroît plus vite que $e^{iE_\Omega t}$. C'est cette dernière qui domine l'expression,

$$\begin{aligned} e^{iHt} |0\rangle &= \lim_{t \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} e^{-iE_\Omega t} |\Omega\rangle \langle \Omega|0\rangle \\ |\Omega\rangle &= \lim_{t \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{e^{-iHt} |0\rangle}{e^{-iE_\Omega t} \langle \Omega|0\rangle}. \end{aligned} \quad (12)$$

5. Cette manière de traiter le temps permet d'intégrer sur un contour légèrement tourné par rapport à l'axe des réels. Cela permet d'éviter de passer par les pôles de l'intégrale et donc d'utiliser le théorème des résidus pour effectuer le calcul. Cela est très similaire à la rotation de Wick présentée à la section 3.1

Comme t est très grand, il est possible de lui ajouter une petite constante t_0 , ce qui permet d'exprimer $|\Omega\rangle$ en termes de l'opérateur d'évolution défini à l'équation (8),

$$\begin{aligned} |\Omega\rangle &= \lim_{t \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{e^{-iH(t+t_0)} |0\rangle}{e^{-iE_\Omega(t+t_0)} \langle \Omega|0\rangle} \\ |\Omega\rangle &= \lim_{t \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{e^{-iH(t_0-(-t))} e^{-iH_0(-t_0-t)} |0\rangle}{e^{-iE_\Omega(t_0-(-t))} \langle \Omega|0\rangle} \\ |\Omega\rangle &= \lim_{t \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{U(t_0, -t) |0\rangle}{e^{-iE_\Omega(t_0-(-t))} \langle \Omega|0\rangle}. \end{aligned} \quad (13)$$

Alors, $|\Omega\rangle$ est exprimé en termes de $|0\rangle$. Tous les morceaux nécessaires sont réunis pour écrire la correction $\langle \Omega|H_{\text{int}}|\Omega\rangle$ en termes de $\langle 0|\mathcal{H}_{\text{int}}|0\rangle$. Explicitement,

$$\begin{aligned} \langle \Omega|H_{\text{int}}|\Omega\rangle &= \langle \Omega|\phi(t, \vec{x})\phi(y)|\Omega\rangle \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0|U(t, t_0)}{e^{-iE_\Omega(t-t_0)} \langle 0|\Omega\rangle} [U(t', t_0)^\dagger \Phi(t, \vec{x})\Phi(t, \vec{y})U(t', t_0)] \frac{U(t_0, -t) |0\rangle}{e^{-iE_\Omega(t_0-(-t))} \langle \Omega|0\rangle} \end{aligned} \quad (14)$$

qui se réduit à,

$$\begin{aligned} \langle \Omega|H_{\text{int}}|\Omega\rangle &= \lim_{t \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0|U(t, t')\Phi(x)\Phi(y)U(t', -t)|0\rangle}{\langle 0|U(t, -t)|0\rangle} \\ \langle \Omega|H_{\text{int}}|\Omega\rangle &= \lim_{t \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0|\Phi(x)\Phi(y)U(t, -t)|0\rangle}{\langle 0|U(t, -t)|0\rangle} \\ \langle \Omega|H_{\text{int}}|\Omega\rangle &= \lim_{t \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0|\Phi(x)\Phi(y)e^{-i \int_{-t}^t dt_1 \mathcal{H}_{\text{int}}(t_1)}|0\rangle}{\langle 0|e^{-i \int_{-t}^t dt_1 \mathcal{H}_{\text{int}}(t_1)}|0\rangle}. \end{aligned} \quad (15)$$

Cette équation exprime l'énergie de la perturbation, à gauche, en termes du champ non perturbé $\Phi(x)$ et de l'opérateur d'évolution $U(t, t_0) = e^{-i \int_{t_0}^t dt_1 \mathcal{H}_{\text{int}}}$. Elle a été dérivée pour la première fois par le physicien Freeman Dyson.

2.3 Règles et diagrammes de Feynman

L'équation (15) peut être évaluée en prenant l'expansion en série de l'équation (10). L'expansion du numérateur est

$$\langle 0|\Phi(x)\Phi(y)e^{-i\int_{-t}^t dt_1 \mathcal{H}_{\text{int}}(t_1)}|0\rangle = \langle 0|\Phi(x)\Phi(y) - i\Phi(x)\Phi(y) \int_{-t}^t dt_1 \mathcal{H}_{\text{int}} \quad (16)$$

$$+ (-i^2)\Phi(x)\Phi(y) \int_{-t}^t dt_1 \int_{-t}^{t_1} dt_2 \mathcal{H}_{\text{int}}(t_1)\mathcal{H}_{\text{int}}(t_2) + \dots |0\rangle$$

$$= \langle 0|\Phi(x)\Phi(y)|0\rangle + \langle 0| -i\Phi(x)\Phi(y) \int_{-t}^t dt_1 \mathcal{H}_{\text{int}}|0\rangle + \dots \quad (17)$$

Le premier terme $\langle 0|\Phi(x)\Phi(y)|0\rangle$ est simplement le propagateur libre, sans interaction

$$\langle 0|\Phi(x)\Phi(y)|0\rangle = D_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ip\cdot(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (18)$$

où p est un quadrivecteur énergie-impulsion. Le deuxième terme comporte l'interaction au premier ordre, le troisième, au deuxième ordre, etc. Selon la théorie d'interaction, ces termes varieront. En étudiant attentivement diverses théories d'interaction, comme la QED, la ϕ^3 ou la ϕ^4 , Richard Feynman se rendit compte que les contributions aux ordres supérieurs ajoutaient toujours les mêmes termes. Il lui vient l'idée d'associer ces termes à des éléments graphiques représentant les processus de propagation et d'interaction. Ces graphiques, accompagnés par leurs prescriptions, sont devenus très populaires et sont amplement utilisés en QFT. Pour illustrer davantage le propos, nous nous intéresserons à la théorie d'interaction ϕ^4 . La densité lagrangienne associée à cette théorie s'écrit

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4, \quad (19)$$

divisible en deux parties :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_{\text{int}}$$

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\partial^\mu\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2, \quad \mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{\lambda}{4!}\phi^4. \quad (20)$$

Ici, l'approche lagrangienne est parfaitement analogue à l'approche hamiltonienne de la mécanique quantique. Cela nous permet de réutiliser l'expression (15). Ainsi, le deuxième terme du numérateur

devient :

$$\begin{aligned} \langle 0| -i\Phi(x)\Phi(y) \int_{-t}^t dt_1 \mathcal{H}_{\text{int}}|0\rangle &= \langle 0| -i\Phi(x)\Phi(y) \int_{-t}^t dt_1 \mathcal{L}_{\text{int}}|0\rangle \\ &= \langle 0| \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right) \Phi(x)\Phi(y) \int d^4z \Phi(z)\Phi(z)\Phi(z)\Phi(z)|0\rangle. \end{aligned} \quad (21)$$

Afin d'aller plus loin dans l'évaluation de cette intégrale, il est nécessaire d'utiliser le théorème de Wick⁶, qui stipule que des champs dans un ordre temporel $T\{\Phi(x)\Phi(y)\}$ respectent

$$T \left\{ \prod_i \Phi(x_i) \right\} = N \left\{ \prod_i \Phi(x_i) + \text{la somme de toutes les contractions possibles entre les champs} \right\},$$

où $N\{\Phi(x)\Phi(y)\}$ sont les champs dans l'ordre normal. L'ordre normal sert simplement à s'assurer que la particule est créée avant d'être détruite⁷. Ainsi, le calcul reste cohérent, car il est impossible de détruire une particule qui n'existe pas. Par exemple, pour trois champs temporellement ordonnés,

$$T \{ \Phi(x)\Phi(y)\Phi(z) \} = N \left\{ \Phi(x)\Phi(y)\Phi(z) + \overline{\Phi(x)\Phi(y)}\Phi(z) + \overline{\Phi(x)\Phi(z)}\Phi(y) + \overline{\Phi(y)\Phi(z)}\Phi(x) \right\},$$

où

$$\overline{\Phi(x)\Phi(y)} = D_F(x-y). \quad (22)$$

est la contraction de Wick entre deux champs. Une des caractéristiques du théorème de Wick est que tout champ non contracté aura une contribution nulle à l'expression. Cela simplifie énormément les calculs, car tous les champs doivent se transformer en propagateurs si ceux-ci sont en ordre temporel. Fort heureusement, il se trouve que l'expression (15) respecte cette condition. Alors, la série perturbative se simplifie grandement et prend la forme

$$\langle \Omega|H_{\text{int}}|\Omega\rangle \propto \langle \Omega|\Phi(x_i)\Phi(x_j)\dots|\Omega\rangle \propto \sum_{i,j} D_F(x_i-x_j). \quad (23)$$

6. Le théorème est présenté sans preuve, car l'objectif de ce document est de présenter le processus de renormalisation. Présenter de manière précise chacun des éléments menant à la renormalisation exige du temps et des détours qui rendraient ce document bien plus long.

7. Il faut se rappeler qu'un champ est constitué d'opérateurs de création et d'annihilation

appelé *sommet*. Il est défini par sa connexion à 4 lignes différentes associées à 4 champs (ϕ^4). C'est naturellement le point associé à l'interaction. Ces diagrammes représentent les points de création et d'annihilation des particules, ainsi que les points d'interaction. Le numérateur de l'expression (15) peut alors s'exprimer comme la somme de tous les diagrammes possibles avec seulement deux points externes. Cependant, certains diagrammes affichent des contributions qui ne sont pas reliées à des points externes. C'est le cas du point z du premier terme à gauche de l'expression (25). Ces diagrammes ne donnent aucune information de valeur. Ils spécifient simplement que le processus en question, par exemple :



(26)

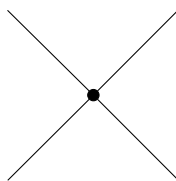
peut se produire à tout point z de l'espace et à tout moment entre $-t \leq t_1 \leq t$. Ces diagrammes dits *déconnectés* ne devraient donc pas contribuer à l'amplitude de probabilité associée au processus. Il peut être démontré⁸ que les contributions superflues associées aux diagrammes déconnectés tels que (26) annulent précisément les contributions du dénominateur de l'équation (15). Ainsi, (15) peut s'écrire

$$\langle \Omega | H_{\text{int}} | \Omega \rangle = \text{Somme de tous les diagrammes connectés.} \quad (27)$$

Enfin, l'expression (27) permet de représenter le terme d'interaction de l'hamiltonien ou de la densité lagrangienne comme une somme de diagrammes de Feynman connectés. Ces diagrammes peuvent ensuite être convertis en leur contribution respective à la série perturbative en utilisant les *règles de Feynman* associées à cette théorie. Ces règles sont obtenues à l'aide du développement en série de Taylor et consistent en termes récurrents apparaissant dans la série. Elles peuvent être exprimées de diverses façons, mais il est courant de les écrire en termes d'impulsion p . Par exemple, pour la théorie ϕ^4 les règles de Feynman sont :

- 1 Toutes lignes internes, non connectées à un point externe $\overset{p}{\text{-----}}$ sont associées à un terme de propagation $\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$.

- 2 Tout sommet



- est associé à un terme d'interaction $-i\lambda$.

8. Se référer au chapitre 4 du Peskin pour plus de détails.

3 Tout point externe x est associé à un 1

4 Il faut s'assurer que l'impulsion est conservée à chaque sommet.

5 Les impulsions restantes doivent être intégrées $\frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$.

6 Il faut diviser par le facteur de symétrie.

Puisque certains diagrammes sont invariants sous symétries, la division par un facteur correspondant au nombre de permutations de ces symétries permet d'obtenir la contribution exacte du diagramme.

2.4 Le problème

L'application de ces règles permet d'obtenir la contribution du diagramme à la série perturbative. Les diagrammes de Feynman sont donc un puissant outil visuel qui permet de calculer l'effet des interactions sur une théorie libre. La seule règle de Feynman qui pose problème est l'intégration sur les impulsions indéterminées. C'est précisément à cet endroit que des divergences peuvent apparaître, nécessitant une renormalisation pour être traitées. Pour voir comment ces divergences apparaissent, il suffit d'écrire la contribution à la série des deux processus suivants :

(28)

En appliquant les règles de Feynman, il est possible de déterminer la contribution de ces deux diagrammes. Le premier possède un sommet, quatre impulsions reliées à quatre points externes. La première règle ne s'applique donc pas pour ces impulsions. Sa contribution est naïvement,

$$-i\lambda. \quad (29)$$

Évidemment, il n'y a pas de problème de convergence, car il n'y a pas d'intégrale. La contribution du deuxième diagramme est

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(i\lambda)^2}{2} \frac{d^4 p_5}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_6}{(2\pi)^4} \frac{i}{p_5^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{p_6^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (30)$$

Ainsi, les impulsions formant la *boucle* p_5 et p_6 peuvent prendre n'importe quelle valeur. En appliquant la conservation de la quantité de mouvement soit $-p_2 + p_1 = -p_3 + p_4 = k$, il devient naturel de chercher à exprimer une des impulsions de la boucle en termes de la quantité de mouvement entrante et sortante k . Par exemple, si l'impulsion associée à la branche supérieure est p_5 et l'impulsion associée à la branche inférieure est p_6 , alors la conservation de la quantité de mouvement impose $p_5 - p_6 = k \Rightarrow p_5 = k + p_6$. En explicitant les directions des quantités de mouvement, le diagramme devient



(31)

Il reste une seule impulsion indéterminée soit p_6 . Alors la contribution devient

$$\int_0^\infty \frac{(i\lambda)^2}{2} \frac{d^4 p_6}{(2\pi)^4} \frac{i}{(k + p_6)^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{p_6^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (32)$$

de manière générale, l'intégrale ci-dessus se comporte comme

$$\approx \int_0^\infty \frac{d^4 p_6}{p_6^4}. \quad (33)$$

Cette intégrale diverge logarithmiquement lorsque $p_6 \rightarrow \infty$.

Ce type de divergence apparaît de manière systématique dans les diagrammes avec des boucles. Selon la théorie d'interaction, certains diagrammes avec des boucles peuvent converger, mais ce n'est pas généralement le cas. Ces diagrammes sont associés aux corrections aux ordres plus grands que 2 (visible par le terme λ^2). Ainsi, le nombre de sommet correspond à l'ordre de la correction. À chaque ordre, une boucle supplémentaire est ajoutée avec une intégrale potentiellement divergente sur une impulsion indéterminée. Ces intégrales rendent la contribution du diagramme de plus en plus difficile à calculer. De manière simple, les intégrales divergeront s'il y a un plus grand nombre de puissances de p au numérateur qu'au dénominateur. Nous sommes ici dans l'impasse initiale de la QFT, à savoir, tout le travail qui a été fait par Dyson avec sa série perturbative ou par Feynman avec son intégrale fonctionnelle ne permettent pas de calculer précisément les interactions avec boucles. C'est ici que le processus de renormalisation vient sauver la mise.

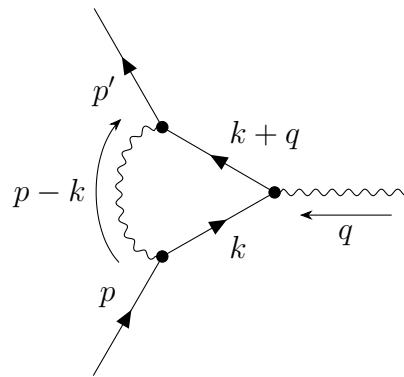
3 De l'infini à au-delà

Cette section présente la procédure de renormalisation. Dans un premier temps, la rotation de Wick est introduite. Puis, deux techniques de régularisation sont présentées, la régularisation de Pauli-Villars qui introduit explicitement une coupure Λ et la régularisation dimensionnelle qui se prête moins bien à la compréhension physique. Ensuite, la procédure de renormalisation des contre termes est succinctement utilisée à l'aide d'une régularisation dimensionnelle, afin d'arriver à une équation du groupe de renormalisation. Finalement, les implications physiques de ces équations sont discutées.

3.1 Encore Wick

Le point de départ de la renormalisation est simplement de chercher à évaluer l'intégrale. Il existe plusieurs manières de procéder. Le processus global qui permet de résoudre l'intégrale est appelé une régularisation.

Une technique de régularisation très utilisée, celle de Pauli-Villars, consiste à rajouter des termes non physiques à la densité lagrangienne initiale. Ces termes représentent des particules lourdes fictives et sont représentés par des champs scalaires de Grassmann. Pour se donner une idée de la technique, considérons le diagramme de Feynman à une boucle



(34)

Ce diagramme présente une interaction entre des particules fermioniques et des photons, des particules bosoniques. Cette interaction est donc régie par l'électrodynamique quantique. Les règles de Feynman associées à cette théorie permettent d'écrire la contribution de ce diagramme comme étant

$$= 2ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}(p') [k\gamma^\mu k' + m^2\gamma^\mu - 2m(k+k')^\mu] u(p)}{((k-p)^2 + i\epsilon)(k'^2 - m^2 + i\epsilon)(k^2 - m^2 + i\epsilon)} \quad (35)$$

où $\not{k} = \gamma^\mu k_\mu$ et γ^μ sont les matrices de Dirac définies en (2) et $k' = k + p$. Cette intégrale n'est certes pas simple à évaluer. Pour y parvenir, il faut procéder à quelques opérations. D'abord, il faut introduire des *paramètres de Feynman*, qui ont pour objectif de réduire les trois termes du dénominateur de (35) en un seul terme D

$$\frac{1}{((k-p)^2 + i\epsilon)(k'^2 - m^2 + i\epsilon)(k^2 - m^2 + i\epsilon)} \propto \frac{1}{D^3} \quad (36)$$

où $D = j^2 - \Delta + i\epsilon$. Le terme Δ peut être vu comme un terme de masse effective positif et le paramètre j comme la nouvelle variable d'intégration construite à partir d'une combinaison des paramètres de Feynman. L'expression se comporte alors comme

$$\propto \int \frac{d^4 j}{(2\pi)^4} \frac{j^2}{(j^2 - \Delta + i\epsilon)^3}, \quad (37)$$

car le numérateur peut être réduit à une forme dépendante de j^2 . Naïvement, cette intégrale devrait diverger logarithmiquement, car il y a 6 puissances de j au numérateur et au dénominateur. Sous cette forme, l'expression a des singularités. Pour intégrer l'élément j^0 , ces pôles se situeront à $j_- = -\sqrt{|\vec{j}|^2 + \Delta + i\epsilon}$ et $j_+ = \sqrt{|\vec{j}|^2 + \Delta - i\epsilon}$. Ici, le \vec{j} dénote le trivecteur impulsion j^μ , $\mu \in \{1, 2, 3\}$. En effectuant une *rotation de Wick*, il est possible d'évaluer l'intégrale sur j^0 aisément. Cette opération consiste à effectuer une rotation des contours dans le plan complexe afin de passer d'un espace minkowskien à un espace euclidien. Pour ce faire, il suffit de transformer la variable j par $j^0 \rightarrow ij_E^0$ et $\vec{j} \rightarrow \vec{j}_E$. L'intégrale devient

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 j}{(2\pi)^4} \frac{1}{[j^2 - \Delta]^3} &= \frac{i}{(-1)^3} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 j_E \frac{1}{(j_E^2 + \Delta)^3} \\ &= \frac{-i}{(2\pi)^4} \int d\Omega \int_0^\infty dj_E \frac{j_E^3}{(j_E^2 + \Delta)^3} \end{aligned} \quad (38)$$

où la présence du terme j_E^3 dans la deuxième ligne provient du jacobien $d^4 x = r^3 \sin^2 \omega \sin \theta d\phi d\theta d\omega dr$, car l'intégrale sur les dimensions spatiales est plus simple en coordonnées sphériques. Les termes angulaires sont intégrés dans $d\Omega$, ainsi $\int d\Omega$ représente l'aire d'une hypersphère en 4D dont le résultat est connu ($2\pi^2$). Le reste de l'intégrale (sur le dénominateur seulement) s'évalue par fractions

partielles.

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty dj_E \frac{j_E^3}{(j_E^2 + \Delta)^3} && \text{Pose } u = j_E^2 \\
& \int_0^\infty du \frac{1}{2} \frac{u}{(u + \Delta)^3} && \text{Sépare en fractions partielles} \\
& \int_0^\infty du \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(u + \Delta)^2} - \frac{\Delta}{(u + \Delta)^3} \right) && \text{Intègre avec } v = u + \Delta \\
& \frac{1}{2} \int_0^\infty dv \frac{1}{v^2} - \frac{\Delta}{2} \int_0^\infty dv \frac{1}{v^3} \\
& \left[\frac{-1}{2v} + \frac{\Delta}{4v^2} \right]_0^\infty = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{-1}{\Delta + j_E^2} \right) - \frac{\Delta}{2} \left(\frac{-1}{2(\Delta + j_E^2)^2} \right) \right]_0^\infty = \frac{1}{4\Delta}
\end{aligned} \tag{39}$$

Alors le résultat final est

$$= \frac{-i}{(2\pi)^4} 2\pi^2 \frac{1}{4\Delta} = \frac{-i}{(4\pi)^2} \frac{1}{2\Delta}. \tag{40}$$

La forme générale s'écrit

$$\int \frac{d^4 j}{(2\pi)^4} \frac{1}{(j^2 - \Delta)^m} = \frac{i(-1)^m}{(4\pi)^2} \frac{1}{(m-2)(m-1)} \frac{1}{\Delta^{m-2}} \tag{41}$$

et similairement la forme générale de l'intégrale (37) donne

$$\int \frac{d^4 j}{(2\pi)^4} \frac{j^2}{(j^2 - \Delta)^m} = \frac{i(-1)^{m-1}}{(4\pi)^2} \frac{2}{(m-3)(m-2)(m-1)} \frac{1}{\Delta^{m-3}}, \text{ pour } m > 3. \tag{42}$$

Ainsi, la rotation de Wick permet d'évaluer les intégrales sur les quadrivecteurs impulsion. Cependant, cette intégrale diverge lorsque $m = 3$, ce qui est le cas de (37). Pour résoudre ce problème, il faut utiliser une régularisation.

3.2 La régularisation de Pauli-Villars

La régularisation de *Pauli-Villars* figure parmi les plus répandues. Elle consiste à introduire un champ supplémentaire, représentant un photon lourd non physique, dans le lagrangien avec un couplage proportionnel à une constante de coupure Λ^2 . Cela a pour conséquence de changer une des règles de Feynman de la QED. Chaque propagateur de photon est modifié de telle sorte que la prescription

$$\frac{1}{(k-p)^2 + i\epsilon} \rightarrow \frac{1}{(k-p)^2 + i\epsilon} - \frac{1}{(k-p)^2 - \Lambda^2 + i\epsilon} \tag{43}$$

est respectée. Ce changement n'affecte pas le comportement pour les petites valeurs de k , puisque Λ est large. Sous cette nouvelle règle, (42) devient :

$$\int \frac{d^4 j}{(2\pi)^4} \left(\frac{j^2}{(j^2 - \Delta)^3} - \frac{j^2}{(j^2 - \Delta_\Lambda)^3} \right) \quad (44)$$

où $\Delta_\Lambda \propto \Delta + \Lambda^2$. Cette intégrale peut être évaluée à l'aide d'une rotation de Wick

$$\int \frac{d^4 j}{(2\pi)^4} \left(\frac{j^2}{(j^2 - \Delta)^3} - \frac{j^2}{(j^2 - \Delta_\Lambda)^3} \right) = \frac{i}{(4\pi)^2} \ln \left(\frac{\Delta_\Lambda}{\Delta} \right). \quad (45)$$

Ce résultat ne dépend pas de m , le nombre de termes au dénominateur, donc ce problème est réglé. Cependant, pour $\Lambda \rightarrow \infty$, l'expression (45) diverge logarithmiquement, comme la forme (37) le laissait supposer. La constante de coupure pose donc toujours problème. Pour vraiment s'en débarrasser, il faut procéder à la renormalisation.

3.3 Régularisation dimensionnelle

La régularisation dimensionnelle est sans doute la technique de régularisation la plus utilisée. Elle n'est pas particulièrement intuitive, mais fonctionne très bien. L'idée provient du fait que les intégrales convergent plus facilement dans un nombre de dimension inférieure à 4. Cela se voit aisément à l'équation (33). En deux dimensions spatiales et une dimension temporelle, l'intégrale (33) se comporte comme

$$\approx \int \frac{d^3 k}{k^4} \approx \frac{1}{k} \quad (46)$$

qui converge pour $k \rightarrow \infty$ et semble diverger pour $k \rightarrow 0$. Cependant, les détails du calcul font en sorte que l'intégrale est bien définie à $k \rightarrow 0$ ⁹. De manière générale, les corrections à une boucle convergent systématiquement pour $d < 4$, où d est le nombre de dimensions. L'idée est donc d'intégrer en moins de 4 dimensions puis de prendre la limite $d \rightarrow 4$. Reprenons un exemple similaire à (41), mais avec d dimensions et $m = 2$,

$$\int \frac{d^d j}{(2\pi)^d} \frac{1}{(j^2 + \Delta)^2}. \quad (47)$$

9. Les détails de cette affirmation sont omis. Pour plus de détails, se référer à la section 6.4 du Peskin.

qui est transformée par la rotation de Wick $j^0 = ij_E^0$ et $\vec{j} = \vec{j}_E$

$$\begin{aligned} &= \frac{i}{(-1)^{d+2}} \int \frac{d^d j_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(j_E^2 + \Delta)^2} \\ &= \frac{i}{(-1)^{d+2}} \int \frac{d\Omega}{(2\pi)^d} \int_0^\infty dj_E \frac{j_E^{d-1}}{(j_E^2 + \Delta)^2} \end{aligned} \quad (48)$$

où l'intégrale $\int d\Omega$ représente encore l'aire d'une hypersphère à d dimensions. Sa valeur s'exprime en termes de la fonction Γ

$$\int d\Omega = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}. \quad (49)$$

La deuxième partie de l'intégrale est transformée comme suit,

$$\int_0^\infty dj_E \frac{j_E^{d-1}}{(j_E^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{2} \int_0^\infty d(j_E^2) \frac{(j_E^2)^{d/2-1}}{(j_E^2 + \Delta^2)}. \quad (50)$$

Avec la substitution $x = \frac{\Delta}{j_E^2 + \Delta}$, les bornes deviennent $j_E = 0 \rightarrow x = 1$ et $j_E = \infty \rightarrow x = 0$. L'expression prend la forme,

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{2-d/2} \int_0^1 dx (x^{2/d-1}) (1-x)^{d/2-1} = B\left(\frac{2}{d}, \frac{d}{2}\right), \quad (51)$$

où B est la fonction bêta définie comme

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 dx x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \quad (52)$$

Avec la définition de B , l'expression devient

$$\int \frac{d^d j}{(2\pi)^d} \frac{1}{(j^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{2-d/2} \frac{\Gamma(2 - \frac{2}{d})}{\Gamma(2)}. \quad (53)$$

La fonction Γ définie comme

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty^+} \frac{n! n^z}{z(z-1)\dots(z-n)}$$

possède des pôles à $z \in \mathbb{N} \rightarrow d \in \{4, 6, 8, \dots\}$. Comme on s'intéresse au cas $d = 4$, il y a toujours un problème. L'astuce est de définir un nouveau paramètre $\epsilon = 4 - d$ et d'utiliser l'expansion de

la fonction gamma pour z positif

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}$$

où $\gamma \approx 0.5772$, est la constante *d'Euler-Mascheroni*. L'expression (53) devient alors

$$= \lim_{d \rightarrow 4} \frac{1}{(4\pi)^2} \left[\frac{2}{\epsilon} - \ln(\Delta) - \gamma + \ln(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon) \right]. \quad (54)$$

Ainsi, toute la divergence est contenue dans le terme $\frac{2}{\epsilon}$. Sous cette forme, il sera aisé de la faire disparaître lors de la renormalisation.

3.4 Une procédure de renormalisation

Enfin, après tout ce chemin, nous arrivons au traitement mathématique du processus de renormalisation. La littérature présente deux familles de techniques. La première est appelée la *théorie des perturbations à nue* et la deuxième, la *théorie des perturbations renormalisées*. Cette section présente la technique de renormalisation la plus répandue, soit celle des contre termes appartenant à la famille des techniques des perturbations renormalisées.

Commençons par résumer ce qui a été présenté jusqu'à maintenant. La théorie d'interaction ϕ^4 est formulée en termes d'une densité lagrangienne présentée à l'équation (19). Cette densité est modifiée

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 - \frac{\lambda_0}{4!} \phi^4, \quad (55)$$

de sorte qu'elle dépend maintenant de la masse à nue m_0 et de la constante de couplage à nue λ_0 . La deuxième partie de ce document présente la manière de calculer les corrections à l'aide de la série perturbative de Dyson. Il a été illustré qu'il est possible d'effectuer une expansion en série de Taylor afin de calculer les corrections aux observables physiques introduites par le terme d'interaction. Cette expansion en série de Taylor peut être transformée en une somme sur tous les diagrammes de Feynman possibles. Évidemment, l'expansion en série introduit des corrections ordre par ordre. Pour les besoins du calcul qui va suivre, seules les contributions aux premier et deuxième ordres, c'est-à-dire les diagrammes de Feynman sans boucle et à une boucle, seront traitées. Ainsi, pour calculer ces corrections, il faut sommer sur tous les diagrammes possibles sans boucle et à une boucle. Cependant, les diagrammes à boucles apportent une contribution divergente, causée par l'intégration sur toutes les valeurs possibles d'impulsions intermédiaires. L'exemple qui suit est la procédure de renormalisation par contre termes d'une interaction entre

Les diagrammes ci-dessus représentent l'ensemble des diagrammes ayant leur forme. Par exemple, le diagramme (59) représente

$$(60)$$

où les termes à n boucles sont cachés dans les \dots . L'amplitude totale \mathcal{M} associée à ces diagrammes est

$$i\mathcal{M} = -i\lambda + (-i\lambda)^2[iD_1 + iD_2 + iD_3] - i\delta_\lambda, \quad (61)$$

où D_1 est le premier diagramme de la parenthèse, qui est d'ailleurs le même diagramme que (31). Sa contribution est donnée à (32)

$$\int \frac{(i\lambda)^2 d^4p_6}{2} \frac{i}{(2\pi)^4 (k+p_6)^2 - m^2} \frac{i}{p_6^2 - m^2},$$

où les contributions redondantes en $i\epsilon$ sont enlevées. Les contributions des diagrammes D_1, D_2, D_3 divergent. Pour respecter la condition de renormalisation qui requiert que l'amplitude reste finie, il faut que le contre terme annule les infinités provenant de ces trois diagrammes. Mathématiquement, cette condition devient

$$\delta_\lambda = -\lambda^2[D_1 + D_2 + D_3]. \quad (62)$$

Les diagrammes contribuent également à l'amplitude. Leur intégrale a la forme de (47). Fortuite-ment, cette intégrale a déjà été résolue à la section 3.3. Il faut procéder à une rotation de Wick, puis à une régularisation. Dans le cas présent, la régularisation dimensionnelle est utilisée pour obtenir (54)

$$\int \frac{(i\lambda)^2 d^4p_6}{2} \frac{i}{(2\pi)^4 (k+p_6)^2 - m^2} \frac{i}{p_6^2 - m^2} = \lim_{d \rightarrow 4} \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \left[\frac{2}{\epsilon} - \ln(\Delta) - \gamma + \ln(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon) \right]. \quad (63)$$

La valeur de Δ varie d'un diagramme à l'autre. Ainsi, le contre terme δ_λ s'exprime

$$\begin{aligned} \delta_\lambda &= -\lambda^2[D_1 + D_2 + D_3] \\ \delta_\lambda &= \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \left[\frac{6}{\epsilon} - 3\gamma + 3\ln(4\pi) - \ln(\Delta'_1) - \ln(\Delta'_2) - \ln(\Delta'_3) \right]. \end{aligned} \quad (64)$$

L'amplitude totale \mathcal{M} devient par définition,

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M} &= -i\lambda - \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \left[\frac{2}{\epsilon} - \ln(\Delta_1) - \gamma + \ln(4\pi) + \frac{2}{\epsilon} - \ln(\Delta_2) - \gamma + \ln(4\pi) + \frac{2}{\epsilon} - \ln(\Delta_3) - \gamma + \ln(4\pi) \right] \\
 &\quad + \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \left[\frac{6}{\epsilon} - 3\gamma + 3\ln(4\pi) - \ln(\Delta'_1) - \ln(\Delta'_2) - \ln(\Delta'_3) \right] \\
 i\mathcal{M} &= -i\lambda - \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \left[\ln \left(\frac{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3}{\Delta'_1 \Delta'_2 \Delta'_3} \right) \right]. \tag{65}
 \end{aligned}$$

À la section 3.3, il a été mentionné que l'avantage de la régularisation dimensionnelle est de concentrer la divergence dans un seul terme $2/\epsilon$. Comme l'amplitude ne possède plus ϵ , et que tous les Δ sont finis, l'amplitude ne possède plus de divergences. C'est enfin le résultat souhaité!

Pour terminer la renormalisation de ϕ^4 à une boucle, il faut aussi considérer les contributions du propagateur libre

$$\text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} = \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---}. \tag{66}$$

L'amplitude \mathcal{M} de ces diagrammes vaut :

$$i\mathcal{M} = -i\lambda L_1 + i(p^2 \delta_Z - \delta_m). \tag{67}$$

La contribution de L_1 est

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2}, \tag{68}$$

qui s'évalue à l'aide d'une rotation de Wick et d'une régularisation dimensionnelle

$$L_1 = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{i}{k^2 - m^2}, \tag{69}$$

qui a encore une fois la forme (47). Le résultat est alors

$$L_1 = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(1 - d/2)}{(m^2)^{1-d/2}}. \tag{70}$$

Là aussi, il faut respecter la condition de renormalisation ; l'amplitude totale doit être finie. En substituant le résultat de L_1 dans (67), l'amplitude devient :

$$i\mathcal{M} = -i\lambda \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(1-d/2)}{(m^2)^{1-d/2}} + i(p^2\delta_Z - \delta_m). \quad (71)$$

Comme L_1 n'est pas proportionnel à p^2 , il faut poser $\delta_Z = 0$. Ce qui laisse le dernier contre terme

$$\delta_m = -\frac{\lambda}{2(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(1-d/2)}{(m^2)^{1-d/2}}. \quad (72)$$

Ces contre termes absorbent les divergences présentes dans la théorie non renormalisée contenant les constantes à nue.

$$\begin{aligned} \delta_Z &= Z - 1 & \delta_m &= m_0^2 Z - m^2, & \delta_\lambda &= \lambda_0 Z^2 - \lambda \\ -\frac{\lambda}{2(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(1-d/2)}{(m^2)^{1-d/2}} &= m_0^2 Z - m^2 & \frac{3\lambda^2}{32\pi^2} \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma - \ln\left(\frac{4\pi}{\Delta'_1 \Delta'_2 \Delta'_3}\right) \right] &= \lambda_0 Z^2 - \lambda \end{aligned} \quad (73)$$

3.5 L'équation du groupe

Les relations précédentes relient les constantes à nue aux constantes physiques à l'aide d'un contre terme dérivé grâce à une régularisation dimensionnelle.

Les quantités physiques observables sont λ et m . Comme mentionné à la première partie, il a été démontré expérimentalement que ces constantes ont une valeur différente en fonction de l'énergie à laquelle la mesure est effectuée. Par exemple, la mesure de la masse de l'électron peut s'effectuer par une collision entre un électron et un positron qui forme deux photons. Plus l'expérience est faite à haute énergie, plus la masse mesurée de l'électron diffère de sa masse au repos. Physiquement, ce phénomène s'explique grâce aux nuages de particules qui entourent l'électron. Ce nuage est appelé la *self-energy*, et correspond à des boucles dans la propagation de l'électron. Plus l'énergie est haute, plus la collision risque de pénétrer le nuage de *self-interaction* de l'électron et plus notre mesure de la masse de l'électron variera. Cette idée est classiquement analogue à la mesure de la charge d'un atome. Vu de loin, l'atome semble neutre. Mais, en s'approchant, l'observateur commence à distinguer la structure de l'atome. Il remarque un noyau chargé positivement et des électrons l'orbitant chargés négativement. Si l'observateur s'approche très près du noyau, à l'intérieur des orbites d'électrons, il ne verra plus que le noyau et "l'atome" lui apparaîtra chargé positivement.

Ces évidences expérimentales démontrent que les constantes physiques dépendent de l'énergie à laquelle la mesure est effectuée. Mathématiquement, les expressions dérivées à la dernière section pour ces constantes devront refléter cette dépendance. C'est l'idée derrière les équations du groupe

de renormalisation. En introduisant un paramètre d'échelle μ , les constantes, dites renormalisées, devront satisfaire les relations suivantes :

$$\frac{\mu}{Z_R} \frac{dZ_R}{d\mu} = \gamma(\lambda_R), \quad \frac{\mu}{m_R^2} \frac{dm_R^2}{d\mu} = \gamma_m(\lambda_R), \quad \mu \frac{d\lambda_R}{d\mu} = \beta(\lambda_R). \quad (74)$$

Les fonctions γ et β prennent simplement les valeurs des contre termes $\gamma(\lambda_R) = \delta_Z$, $\gamma_m(\lambda_R) = \delta_m$. De plus, $\beta(\lambda_R) = \delta_\lambda$ à l'échelle μ pour cette théorie.

Ces relations peuvent être dérivées à l'aide de l'équation de Callan-Symanzik, qui peut être vue comme la génératrice des équations du groupe de renormalisation. Cette équation a la forme

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} + n\gamma(\lambda) \right] G^{(n)}(x_i, \mu, \lambda) = 0. \quad (75)$$

Où μ est le paramètre d'échelle et G , la fonction de Green à n points définie comme

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \langle \Omega | \Phi(x_1) \dots \Phi(x_n) | \Omega \rangle. \quad (76)$$

Les équations du groupe de renormalisation (74) ont donc un pouvoir prédictif substantiel. Elles permettent de prédire la valeur des constantes de couplage à n'importe quelle valeur d'énergie μ . Cela implique que la physique à basse énergie détermine entièrement la physique à haute énergie. C'est le point de vue moderne de la procédure de renormalisation.

4 Conclusion

La renormalisation est un sujet vaste et complexe. Ce concept reste avant tout un processus mathématique cherchant à éliminer les divergences qui apparaissent lors du calcul de l'amplitude de probabilité associé aux interactions à boucle(s) dans un diagramme de Feynman. En première partie, l'aspect philosophique de la renormalisation a été étudié en apportant des points de vue historique et personnel sur les applications, sur l'existence et sur les succès de la procédure de renormalisation. En deuxième partie, la provenance précise des divergences dans les théories d'interaction a été illustrée, en partant de la théorie des perturbations et en exprimant la série perturbative en termes de propagateurs libres. Ensuite, le lien entre la série perturbative et l'outil des diagrammes de Feynman a été démontré, soulevant certaines règles pour caractériser la contribution de ces diagrammes à la série perturbative. La troisième partie visait à décrire mathématiquement la procédure de renormalisation à travers la rotation de Wick et une régularisation ayant pour objectif d'introduire une coupure permettant d'exprimer la contribution d'un diagramme divergent. Pour donner suite à cette régularisation, un exemple de renormalisation utilisant la méthode des contre termes a été appliquée à la théorie scalaire ϕ^4 , suivi d'une brève discussion des équations du groupe de renormalisation.

Ce document se veut une introduction à la renormalisation. En ce sens, de nombreux points restent à approfondir afin de bien saisir l'ampleur du processus. Entre autres, les équations du groupe de renormalisation, brièvement mentionnées vers la fin de la troisième partie, ont davantage à offrir que ce qui est présenté. La première partie s'interroge sur la renormalisabilité de la nature. L'exemple utilisé dans ce document, la théorie d'interaction ϕ^4 , est une théorie renormalisable. Il existe aussi des théories dites non renormalisables, comme les modèles les plus simples de gravité quantique, ou super renormalisables comme la théorie ϕ^4 en moins de quatre dimensions. Les aspects qui rendent ces théories non renormalisables ou super renormalisables sont un domaine de la renormalisation particulièrement riche et intéressant. Pour terminer, il a été démontré en 1960 par Kenneth Wilson que la renormalisation formait un pont incongru entre la physique statistique et la théorie quantique des champs. Il a relié le comportement d'un système lors d'une transition de phase de deuxième ordre au comportement d'un champ en QFT. Plus précisément, lors de la transition de phase de deuxième ordre, deux phases de la matière se superposent ce qui mène à une invariance d'échelle au point critique. La grande portée des corrélations entre les particules du système à l'étude apporte des divergences dans le calcul de diverses quantités d'intérêts qui sont précisément analogues aux divergences rencontrées lors des calculs perturbatifs. Wilson remarqua que ces divergences sont toutes deux absorbées dans des constantes de façons semblables ce qui lui permit de trouver un lien entre ces deux domaines de la physique. En bref, j'espère que la lecture de ce document a été utile et que vous avez appris certaines choses sur la renormalisation que vous

ignoriez jusqu'à maintenant.

-Victor D.

Références

- [1] John BAEZ. *Renormalization Made Easy*. 1999. URL : <https://fr.scribd.com/document/245475602/Renormalization-Made-Easy-Baez>.
- [2] James BJORKEN et Sidney DRELL. *Relativistic Quantum Fields*. McGraw-Hill Book Company, 1965.
- [3] Tian Yu CAO et Silvan SCHWEBER. “The Conceptual Foundations and the Philosophical Aspect of Renormalization Theory”. In : *Synthese* 97.1 (oct. 1993), p. 33–108.
- [4] Bertrand DELAMOTTE. “A hint of renormalisation”. In : *arXiv* (2003).
- [5] Kresimir KUMERICKI. *Feynmann Diagrams for Beginners*.
- [6] Ling-Fong LI. “Introduction to Renormalization in Field Theory”. In : *arXiv* (2012).
- [7] Luc MARLEAU. *Introduction à la physique des particules*. 2018.
- [8] Taizo MUTA. *Foundations of Quantum Chromodynamics - An Introduction to Perturbative Methods in Gauge Theories*. World Scientific, 1987.
- [9] Michael PESKIN et Daniel SCHROEDER. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press, 1995.
- [10] Lewis RYDER. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 1985.
- [11] Assaf SHOMER. “A pedagogical explanation for the non-renormalizability of gravity”. In : *arXiv* (2007).
- [12] J. ZINN-JUSTIN. *Renormalisation et Groupe de Renormalisation : Les Infinis en Physique Microscopique Contemporaine*. 1999.