

**Mathématiques du développement asymptotique
appliquées à la diffusion d'un électron par un noyau**

Vincent Comeau

Travail remis à M. Luc Marleau
pour le cours
Physique des particules

19 avril 2018
Université Laval

Table des matières

1	Principes de la théorie des collisions	3
1.1	Énoncé du problème	3
1.2	Une approche non relativiste	4
2	Mathématiques du développement asymptotique	6
2.1	Exemple tiré de la théorie des collisions	6
2.2	L'approche par variation de paramètre	8
2.3	L'approche exponentielle	11
3	Cas de l'électron diffusé par un noyau	13
3.1	Solution exacte du problème	13
3.2	Développement asymptotique de la solution	16
	Bibliographie	20

*Le principe est plus important par sa potentialité
que par sa taille : c'est pourquoi ce qui, à
l'origine, est petit devient à la fin énorme.*

Aristote¹

Tout ce travail a grandi sous l'effet d'une idée dénichée chez Feynman. Dans son livre plutôt riche et concis portant sur l'électrodynamique quantique², Feynman mentionne en effet qu'il existe une solution exacte au problème de la diffusion d'un électron par un potentiel électrostatique. Il précise que cette solution exacte peut être obtenue tout autant dans les cas classique et relativiste, c'est-à-dire tout autant par le moyen de l'équation de Schrödinger, que par le biais de l'équation de Dirac. Cette remarque de Feynman, brève remarque recluse quelque part dans les pages courtes d'une grande pensée, comme enfermée entre deux calculs approximatifs réalisés par des propagateurs, cette remarque sut piquer ma curiosité.

Ainsi, ce travail qui devait initialement faire l'objet d'une étude sommaire de l'électrodynamique quantique se transforma tout d'un coup, muta en une investigation à saveur plus mathématique, concernant la solution exacte de l'équation de Schrödinger dans le contexte d'un certain processus de diffusion. On pourrait presque dire, d'ailleurs, que ce modeste travail rejoint la physique des particules surtout par ses contours et par le bas, c'est-à-dire par l'intermédiaire de l'un de ses plus simples cas de figure, de même que l'une de ses plus fondamentales réussites, à savoir le cas d'une particule chargée diffusée par un potentiel électrostatique. Sans la découverte de ce processus de diffusion, grâce à la célèbre expérience réalisée par Rutherford, la physique des particules n'aurait tout simplement jamais vraiment vu le jour.

1. Aristote, *Du Ciel*, 271b12, trad. C. Dalimier et P. Pellegrin.

2. R. Feynman, *Quantum Electrodynamics*, p. 81.

Chapitre 1

Principes de la théorie des collisions

1.1 Énoncé du problème

Dans le cadre de ce travail, je me propose d'étudier le problème de la collision entre une particule chargée et un potentiel électrostatique. Les principes mis en jeu dans l'étude d'une telle collision seront d'abord discutés de façon générale, en insistant surtout sur les mathématiques particulières qu'ils impliquent. Puis, ces principes seront appliqués au cas le plus simple possible, à savoir celui de la collision entre deux particules chargées, interagissant l'une avec l'autre par le biais d'un potentiel électrostatique.

On considère donc une particule chargée entrant en collision avec un certain potentiel. Bien qu'un peu grossière, cette formulation possède l'avantage de préciser le genre de potentiel impliqué dans une telle collision. En disant que la particule entre en collision avec un potentiel, ou qu'elle rencontre un potentiel, on insinue en effet que l'influence de ce potentiel demeure confinée à une certaine région de l'espace. Le potentiel se fait surtout sentir dans la région où se produit la collision, par exemple près de l'origine du repère de coordonnées, à $\mathbf{r} = 0$. On suppose que le potentiel perd de son effet et s'atténue de plus en plus à mesure que l'on s'éloigne de ce point, c'est-à-dire dans la limite où r devient très grand. Dans cette limite, la particule se trouve libre, n'étant alors soumise à aucun potentiel.

On suppose en outre que le potentiel rencontré par la particule est central, c'est-à-dire qu'il dépend exclusivement de la distance r séparant un point donné de l'origine du repère de coordonnées. Ainsi, comme il faut que le potentiel soit localisé près de l'origine, s'annulant lorsque r devient très grand, il est donc possible de le représenter par le moyen d'une série de puissances, dans laquelle toutefois seules les puissances négatives de r peuvent figurer.

$$V(r) = V_\infty + \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2} + \dots \quad (1.1)$$

Évidemment, on peut choisir $V_\infty = 0$ sans perte de généralité, de façon à ce que le potentiel devienne effectivement nul loin de l'origine. En développant ainsi le potentiel en série, on voit tout de suite en quoi l'interaction électrostatique apparaît comme le cas le plus simple possible pour ce genre de problème. Le potentiel électrostatique, allant en r^{-1} , correspond simplement au premier terme de la série de puissances. À cet égard, il est en quelque sorte comparable au cas de l'oscillateur harmonique, qui correspond lui aussi au premier terme de

la série de puissances du potentiel, lorsque celui-ci est développé autour d'un point d'équilibre. On aura l'occasion de revenir sur le cas du potentiel électrostatique et sur cette analogie avec l'oscillateur harmonique à la fin de ce travail. Pour l'instant, toutefois, il convient de rester plus général, en considérant un potentiel central quelconque, s'annulant lorsqu'on s'éloigne de l'origine.

1.2 Une approche non relativiste

La collision entre la particule chargée et le potentiel central peut être décrite en première approximation au moyen de l'équation de Schrödinger, c'est-à-dire en ignorant complètement les contraintes liées à la relativité restreinte. À ce sujet, si l'on suppose que le potentiel est indépendant du temps, il est alors possible de se débarrasser de la variable temporelle, en écrivant la fonction d'onde de la particule comme $\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r})e^{-iEt}$. La composante spatiale de la fonction d'onde est alors décrite par l'équation :

$$-\frac{1}{2m}\nabla^2\psi + V(r)\psi = E\psi \quad (1.2)$$

où m est la masse de la particule entrant en collision avec le potentiel. Il est généralement commode de multiplier cette équation par $-2m$, de façon à pouvoir la réécrire de la façon suivante :

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = U(r)\psi \quad (1.3)$$

où k représente le nombre d'onde de la particule, qui est d'ailleurs égal à sa quantité de mouvement, dans la mesure où l'on se conforme ici à la convention selon laquelle $\hbar = 1$. Il est également pratique de redéfinir le potentiel en l'ajustant d'un facteur $2m$, toujours dans le but de réduire le nombre de constantes impliquées dans l'équation.

$$k = \sqrt{2mE} = mv, \quad U(r) = 2mV(r) \quad (1.4)$$

Loin de l'origine du repère de coordonnées, le potentiel est nul, ce qui implique que la particule se trouve alors dans un état libre. La composante spatiale de sa fonction d'onde est dans ce cas décrite par l'équation $\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$. En particulier, lorsque la particule se trouve loin de l'origine avant la collision, on suppose qu'elle existe sous la forme d'une onde plane se mouvant le long d'une direction privilégiée, par exemple le long de l'axe des z . Concrètement, on peut imaginer par exemple un faisceau d'électrons se propageant initialement vers l'origine du repère, parallèlement à l'axe des z . Puis, en rencontrant le potentiel, la particule change d'état, se trouvant diffusée plus ou moins également dans toutes les directions sous l'effet du potentiel. À la suite de la collision, il devient donc possible d'observer la particule en train de se propager dans d'autres directions que la direction initiale, par exemple à un angle θ par

rapport à l'axe des z . Loin de l'origine et bien longtemps après la fin de la collision, la fonction d'onde spatiale de la particule s'exprime donc de la façon suivante :

$$\psi(r, \theta) \sim e^{ikz} + \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta) \quad (1.5)$$

Cette équation mérite un certain nombre de précisions et d'éclaircissements. D'abord, on constate que cette équation n'est pas vraiment une équation, au sens fort du terme, le symbole de l'égalité pure étant remplacé par celui de l'équivalence. Dans ce cas-ci, le symbole d'équivalence signifie simplement qu'on exprime la fonction d'onde de la particule dans la limite où la distance r est très élevée. L'expression de droite ne correspond pas exactement à la fonction d'onde de la particule, mais elle en constitue tout de même une bonne approximation dans les régions où le potentiel tend à devenir nul. Cette approximation s'améliore d'ailleurs de plus en plus à mesure que l'on s'éloigne de l'origine du repère de coordonnées et que l'on quitte la région où se déroule la collision. Autrement dit, pour recourir à la phraséologie parfois obscure des mathématiques, le symbole d'équivalence employé ici signifie que, dans la limite où $r \rightarrow \infty$, le rapport entre le terme de gauche et le terme de droite tend vers l'unité. On dit alors que l'expression de droite est asymptotiquement égale à celle de gauche.

En considérant l'expression asymptotique de la fonction d'onde énoncée un peu plus haut, on remarque par ailleurs que cette expression comprend deux termes : le premier représente la particule incidente, se propageant le long de l'axe des z avant la collision ; le second représente l'influence du potentiel sur l'état de la particule, celle-ci se trouvant alors projetée plus moins également dans toutes les directions, à la manière d'une onde sphérique déformée par un certain facteur $f(\theta)$ que l'on ne connaît pas encore. Ce facteur éminemment important permet de rendre compte du fait que le potentiel, même s'il est central, ne diffuse pas la particule incidente de la même façon dans toutes les directions, la particule tendant plutôt à persister dans sa direction initiale. Ce facteur est d'ailleurs relié à la section efficace caractéristique de la collision, cette dernière étant égale à la norme au carré dudit facteur.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 \quad (1.6)$$

Chapitre 2

Mathématiques du développement asymptotique

2.1 Exemple tiré de la théorie des collisions

Avant d'entreprendre l'étude de la collision entre une particule chargée et un potentiel électrostatique, dans le but d'obtenir notamment une expression pour le facteur $f(\theta)$ permettant de calculer la section efficace de diffusion, il convient d'abord de se livrer à certains exercices mettant en oeuvre l'équivalence asymptotique évoquée un peu plus tôt. En effet, comme les mathématiques particulières se cachant derrière ce symbole ne m'étaient pas vraiment familières lors de la rédaction de ce travail, je me suis permis de les explorer quelque peu, en tâchant de voir comment de telles équivalences asymptotiques peuvent être obtenues pour les solutions d'équations différentielles.

À cet égard, on sent bien que ces mathématiques, quoique ne relevant pas directement de la physique des particules, lui sont malgré tout intimement liées, de par la nature même des problèmes de collisions que cette branche de la physique est amenée à considérer. Tout ce que l'on peut connaître, en effet, au sujet d'une collision entre une particule et un potentiel quelconque ne se rattache vraiment qu'à l'état de la particule avant et après la collision. On sait comment la particule a été initialement préparée, de même qu'on peut aussi déterminer, par le moyen d'une mesure expérimentale, l'état final de la particule après la collision. Or, la connaissance de l'état de la particule avant et après la collision constitue une connaissance en quelque sorte asymptotique, mettant en jeu un processus de limite qu'il importe de bien comprendre.

Ainsi, dans le cadre ce chapitre, je me propose d'examiner le comportement asymptotique des solutions d'une certaine équation différentielle ordinaire, rencontrée fréquemment dans la théorie des collisions. Cette équation survient notamment lorsqu'on décompose la fonction d'onde de la particule en termes des polynômes de Legendre. De façon générale, lorsqu'on tâche d'étudier l'équation de Schrödinger pour un potentiel central, il est plus habituel de développer la fonction d'onde dans la base des harmoniques sphériques. Toutefois, dans le présent cas, la fonction d'onde de la particule est clairement indépendante de l'angle azimutal, en raison de la symétrie de la collision considérée. Ainsi, un développement en série de polynômes de Legendre s'avère tout à fait général, de même que suffisant.

$$\psi(r, \theta) = \sum_{l \geq 0} \psi_l(r) P_l(\cos \theta) \tag{2.1}$$

On insère cette expression pour la fonction d'onde de la particule dans l'équation de Schrödinger énoncée plus haut (soit l'équation 1.3). À ce stade, il convient de rappeler rapidement que le laplacien, lorsqu'il se trouve exprimé dans les coordonnées sphériques, comprend deux termes, l'un d'eux agissant strictement sur les fonctions dépendant de la distance r , l'autre sur les fonctions dépendant des angles θ et φ .

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{L^2}{r^2} \quad (2.2)$$

Par ailleurs, puisque $L^2 P_l(\cos \theta) = l(l+1)P_l(\cos \theta)$, on en vient donc à constater que la substitution précédente pour la fonction d'onde permet de réduire le problème à une simple multitude d'équations différentielles ordinaires, impliquant seulement la variable r .

$$\sum_{l \geq 0} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi_l}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \psi_l + k^2 \psi_l - U(r) \psi_l \right] P_l(\cos \theta) = 0 \quad (2.3)$$

En effet, de par l'orthogonalité des polynômes de Legendre, l'identité précédente est vérifiée seulement si tous les coefficients devant les différents polynômes de Legendre s'annulent séparément les uns des autres. On obtient alors l'équation différentielle que je me propose d'étudier dans le reste de cette section. Il suffit d'oublier l'indice l et de poser $\psi_l = y/r$, de façon à atterrir sur l'équation suivante :

$$\frac{d^2 y}{dr^2} + k^2 y - \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + U(r) \right) y = 0 \quad (2.4)$$

Il est finalement possible de se débarrasser de la constante k , en posant $x = kr$. Ce faisant, on parvient en quelque sorte à épurer l'équation, à la transporter entièrement sur le terrain des mathématiques, en l'expiant des reliques la rattachant à la théorie des collisions. Bref, pour le reste de cette section, je me contenterai d'étudier l'équation différentielle suivante, sans oublier néanmoins qu'elle provient directement de l'étude non relativiste de la collision entre une particule et un potentiel central.

$$y'' + y - f(x)y = 0 \quad (2.5)$$

où y' désigne la dérivée par rapport à la nouvelle variable x , et où la fonction f est définie par le terme entre parenthèses dans l'équation originale, à un facteur k^2 près. Cette fonction demeure tout à fait générale, sauf qu'elle doit s'annuler lorsque la valeur de x devient très élevée. En effet, cette fonction représente la somme du potentiel U et d'un terme en x^{-2} , lesquels tendent tous les deux vers zéro lorsque la variable x prend de très grandes valeurs. Cela étant dit, je me propose maintenant d'étudier le comportement asymptotique des solutions de l'équation différentielle précédente, précisément dans cette limite où la fonction f tend à devenir négligeable. Pour ce faire, au moins deux méthodes peuvent être suivies : par souci de complétude, ces deux méthodes seront présentées dans la suite de cette section, chacune d'elles étant illustrée en obtenant les deux premiers termes du développement asymptotique des solutions de l'équation différentielle.

2.2 L'approche par variation de paramètre

La première des approches présentées dans cette section provient d'une courte suggestion faite par R. Courant et D. Hilbert, dans leur ouvrage classique sur la physique mathématique¹. Cette approche, que l'on pourrait qualifier de trigonométrique, repose essentiellement sur la méthode de la variation de paramètre. Cette dernière technique est généralement employée afin de trouver les solutions d'une équation différentielle inhomogène, à partir d'une connaissance de la solution générale de l'équation homogène correspondante. Il s'agit alors de se baser directement sur la solution générale de l'équation homogène, mais en permettant aux constantes d'intégration de varier, c'est-à-dire en transformant ces constantes en fonctions de la variable indépendante.

La méthode de la variation de paramètre peut être appliquée au présent problème, si l'on considère que le terme $f(x)y$, négligeable lorsque la valeur de x devient élevée, constitue en quelque sorte un terme inhomogène à l'équation différentielle. Ainsi, dans la limite où la variable x prend de très grandes valeurs, l'équation différentielle devient en quelque sorte homogène, se présentant sous la forme

$$y'' + y = 0 \tag{2.6}$$

Cette équation peut être évidemment résolue de façon générale. Sa solution correspond à une fonction sinus, affectée d'une certaine amplitude α et d'une phase β .

$$y(x) = \alpha \sin(x + \beta) \quad y'(x) = \alpha \cos(x + \beta) \tag{2.7}$$

La technique de la variation de paramètre consiste alors à transformer les deux constantes d'intégration figurant dans la solution de l'équation homogène en fonctions quelconques de la variable x , autrement dit $\alpha = \alpha(x)$ et $\beta = \beta(x)$. L'astuce, toutefois, brillamment suggérée par Courant et Hilbert, consiste à supposer que les paramètres α et β , malgré leur dépendance sur la variable x , sont tels que les expressions pour y et y' énoncées plus haut demeurent vérifiées. Pourvu de cette exigence, on peut alors obtenir deux équations différentielles de premier ordre permettant de déterminer α et β , du moins de façon asymptotique. De fait, en dérivant l'expression $y'(x) = \alpha \cos(x + \beta)$ que l'on suppose valide malgré la dépendance sur x des paramètres α et β , on trouve

$$y'' = \alpha' \cos(x + \beta) - \alpha(1 + \beta') \sin(x + \beta) \tag{2.8}$$

En insérant cette expression dans l'équation différentielle initiale,

$$y'' + y - f(x)y = \alpha' \cos(x + \beta) - \alpha\beta' \sin(x + \beta) - \alpha f(x) \sin(x + \beta) = 0 \tag{2.9}$$

1. R. Courant et D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, vol. 1, ch. V, p. 332.

De la même façon, en dérivant l'expression $y(x) = \alpha \sin(x + \beta)$, puis en identifiant le résultat ainsi obtenu avec l'expression de y' supposée initialement, on trouve

$$y' = \alpha' \sin(x + \beta) + \alpha(1 + \beta') \cos(x + \beta) = \alpha \cos(x + \beta) \quad (2.10)$$

On peut simplifier le terme présent de chaque côté de cette équation, pour obtenir :

$$\alpha' \sin(x + \beta) + \alpha\beta' \cos(x + \beta) = 0 \quad (2.11)$$

À partir des équations 2.9 et 2.11, il est possible d'exprimer α' et β' en termes des deux paramètres α et β . Ce faisant, on peut alors intégrer chacune de ces équations, du moins formellement et de manière itérative, de façon à déterminer le comportement asymptotique des deux paramètres. D'ailleurs, il s'avère que, dans ce cas-ci, l'équation obtenue pour β' est découplée, ne dépendant que de x et de β , se trouvant donc complètement affranchie de l'autre paramètre. En multipliant l'équation 2.9 par $-\sin(x + \beta)$ et l'équation 2.11 par $\cos(x + \beta)$, on trouve respectivement

$$\begin{aligned} -\alpha' \cos(x + \beta) \sin(x + \beta) + \alpha\beta' \sin^2(x + \beta) + \alpha f(x) \sin^2(x + \beta) &= 0 \\ \alpha' \cos(x + \beta) \sin(x + \beta) + \alpha\beta' \cos^2(x + \beta) &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

En additionnant ces deux équations, puis en simplifiant les facteurs α communs à tous les termes restants, on a donc finalement

$$\beta' = -f(x) \sin^2(x + \beta) \quad (2.13)$$

En raisonnant de façon similaire, on obtient l'équation suivante, cette fois-ci pour α' .

$$\alpha' = \alpha f(x) \sin(x + \beta) \cos(x + \beta) \quad (2.14)$$

Pour les besoins du présent exercice, on peut se concentrer exclusivement sur le paramètre β , en supposant que le paramètre α demeure constant, c'est-à-dire en lui assignant sa valeur « à l'infini », que l'on note α_∞ et qui est atteinte lorsque la fonction f devient absolument négligeable, au point où l'équation différentielle redevient homogène. Cette simplification survient tout simplement parce que je me propose d'obtenir seulement les deux premiers termes du développement asymptotique pour la solution de l'équation différentielle, la dépendance en x de α n'intervenant toutefois qu'à partir du troisième terme. Bref, il suffit à ce stade de résoudre l'équation pour β' , en procédant de manière itérative, c'est-à-dire en assignant initialement à β sa valeur à l'infini. On pose $\beta = \beta_\infty$ dans le terme de droite de l'équation 2.13, en prenant aussi la peine d'écrire $\chi(x) = x + \beta_\infty$ pour simplifier quelque peu l'écriture.

$$\beta' \sim -f(x) \sin^2 \chi = -\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(x) \cos 2\chi \quad (2.15)$$

On peut alors intégrer par rapport à x , en fixant les bornes d'intégration de façon à ce que la constante d'intégration soit égale à la valeur de β à l'infini.

$$\beta(x) \sim \beta_\infty + \frac{1}{2} \int_x^\infty f(\zeta) d\zeta - \frac{1}{2} \int_x^\infty f(\zeta) \cos 2\chi(\zeta) d\zeta \quad (2.16)$$

Il est clair que la seconde intégrale est négligeable par rapport à la première, dans la mesure où la fonction f y est alors affectée par un cosinus, c'est-à-dire par un facteur dont la valeur oscille sans jamais s'élever au-dessus de l'unité. On peut aussi se convaincre du caractère négligeable de la seconde intégrale en intégrant celle-ci par parties. Bref, on trouve que, dans la limite où la valeur de x est très élevée, le paramètre β est donné par

$$\beta(x) \sim \beta_\infty + \frac{1}{2} \int_x^\infty f(\zeta) d\zeta \quad (2.17)$$

Cette expression est non seulement utile, permettant effectivement d'obtenir les premiers termes du développement asymptotique recherché, mais elle est également significative, indiquant que la fonction f , initialement supposée en toute généralité, ne peut être à ce point générale. Il faut certes que cette fonction s'annule lorsque la valeur de x devient très élevée, mais il faut en outre que son intégrale s'annule dans cette limite, sans quoi le paramètre β ne réduit pas à une valeur constante à l'infini, rendant ainsi inopérante la technique de la variation de paramètre. Ainsi, par exemple, la fonction $f(x) = x^{-1}$ ne se prête pas à l'approche que l'on vient de suivre, bien qu'elle s'annule tout à fait lorsque x prend de très grandes valeurs. Son intégrale, en effet, correspond au logarithme de la variable x , lequel diverge dans la limite où x devient très important. Cet exemple problématique, que l'on pourrait naturellement associer au cas d'un potentiel électrostatique, sera d'ailleurs de nouveau rencontré à la fin de ce chapitre.

Bref, en supposant que l'intégrale de f devient bel et bien négligeable lorsque la valeur de x est très élevée, on peut alors insérer le développement asymptotique pour β dans l'expression initiale de y (soit l'équation 2.7).

$$\begin{aligned} y(x) &\sim \alpha_\infty \sin(x + \beta) \\ &\sim \alpha_\infty \sin\left(\chi + \frac{1}{2} \int_x^\infty f(\zeta) d\zeta\right) \\ &\sim \alpha_\infty \left[\sin \chi \cos\left(\frac{1}{2} \int_x^\infty f(\zeta) d\zeta\right) + \cos \chi \sin\left(\frac{1}{2} \int_x^\infty f(\zeta) d\zeta\right) \right] \end{aligned} \quad (2.18)$$

où l'on a posé, comme précédemment, $\chi(x) = x + \beta_\infty$. Comme on se place dans la limite où la valeur de x est très élevée, l'intégrale de f prend donc une valeur très petite, ce qui permet d'approximer les deux fonctions trigonométriques contenant cette intégrale par le premier terme de leur développement en série.

$$y(x) \sim \alpha_\infty \left(\sin \chi + \frac{1}{2} \int_x^\infty f(\zeta) d\zeta \cos \chi \right) \quad (2.19)$$

En guise d'exemple, il convient de revenir maintenant au contexte de la théorie des collisions, en considérant le cas particulier où le potentiel est nul. La fonction f varie alors simplement selon l'inverse du carré de x (voir l'équation 2.4).

$$f(x) = \frac{l(l+1)}{x^2} \quad \int_x^\infty f(\zeta) d\zeta = \frac{l(l+1)}{x} \quad (2.20)$$

Dans ce cas, donc, la solution de l'équation différentielle possède le développement asymptotique suivant. Comme le deuxième terme de ce développement s'annule explicitement lorsque la variable x prend des valeurs très élevées, on en conclut que l'équation différentielle tend effectivement à devenir homogène dans cette limite : la solution de l'équation n'est alors plus qu'une simple fonction sinus.

$$y(x) \sim \alpha_\infty \left(\sin \chi + \frac{l(l+1)}{2x} \cos \chi \right) \quad (2.21)$$

Fait notable, en divisant le tout par x , et en fixant $\alpha_\infty = 1$ et $\beta_\infty = -\frac{1}{2}\pi l$, on obtient alors les deux premiers termes du développement asymptotique pour la fonction de Bessel sphérique d'indice l . De fait, en l'absence d'un potentiel externe, la fonction d'onde de la particule se trouve donnée par ce genre de fonctions. Plus précisément, on a que $\psi_l \propto j_l$.

2.3 L'approche exponentielle

Il est possible de reproduire le développement asymptotique que l'on vient d'obtenir, en suivant une approche quelque peu différente. Cette fois-ci, plutôt que de raisonner à partir d'une remarque trouvée dans un texte classique, il s'agit plutôt de partir d'une substitution qui est elle-même classique, que l'on rencontre souvent dans la physique mathématique, notamment dans le contexte de l'optique et dans celui de la mécanique quantique. Il suffit d'exprimer la solution de l'équation différentielle que l'on se propose d'étudier comme l'exponentielle d'une fonction quelconque, laquelle devient alors la fonction d'intérêt dont on cherche le développement asymptotique. Lorsqu'une telle substitution est utilisée en optique, par exemple, pour investiguer le comportement asymptotique des solutions aux équations de Maxwell, la fonction servant d'argument à l'exponentielle est reliée au parcours optique de la lumière². Bref, dans le cadre du présent problème, on pose

$$y(x) = e^{S(x)} \quad (2.22)$$

En dérivant deux fois cette expression pour y , on trouve

$$y' = S' e^S \quad y'' = S'' e^S + S'^2 e^S \quad (2.23)$$

2. Voir M. Born et E. Wolf, *Principes of Optics*, ch. III, p. 111 de la quatrième édition.

On peut alors insérer cette expression pour y'' dans l'équation différentielle initiale (autrement dit, l'équation 2.5). Puis, en prenant soin de simplifier l'exponentielle e^S commune à tous les termes, on obtient l'équation suivante, tout à fait équivalente à l'équation initiale.

$$S'' + S'^2 + 1 - f(x) = 0 \quad (2.24)$$

Jusqu'à présent, aucune approximation n'a été effectuée. On a procédé à une simple substitution, laquelle a permis de transformer l'équation originale, linéaire et de second ordre, en une nouvelle équation, quant à elle non linéaire, mais toujours du second ordre. En apparence, donc, aucun gain évident n'apparaît à l'horizon. L'astuce consiste toutefois à supposer que la fonction S est telle que sa dérivée seconde se trouve négligeable devant le carré de sa dérivée première, lorsque la variable x prend de très grandes valeurs. Ainsi, dans cette limite, l'équation précédente devient

$$S'^2 \sim -1 + f(x) \quad (2.25)$$

En prenant la racine carrée de chaque côté de cette équation, et en prenant soin de conserver les deux racines ainsi obtenues, on trouve

$$S' \sim \pm i \sqrt{1 - f(x)} \sim \pm i \left(1 - \frac{1}{2}f(x) \right) \quad (2.26)$$

où l'on a conservé seulement les deux premiers termes du développement en série de la racine carrée, du fait que la fonction f prend de très petites valeurs lorsque la variable x devient élevée. Ainsi, grâce à cette succession d'approximations, on peut maintenant reproduire le développement asymptotique démontré précédemment par la technique de la variation de paramètre. En intégrant l'équation précédente,

$$S_{\pm}(x) \sim \pm i \left(x + \frac{1}{2} \int_x^{\infty} f(\zeta) d\zeta \right) \quad (2.27)$$

Le développement asymptotique recherché est alors obtenu en prenant l'exponentielle des deux fonctions S_+ et S_- , puis en combinant linéairement ces exponentielles l'une avec l'autre, de façon à construire la solution générale à l'équation différentielle initiale.

$$y(x) = Ae^{S_+} + Be^{S_-} \sim \alpha_{\infty} \sin \left(x + \beta_{\infty} + \frac{1}{2} \int_x^{\infty} f(\zeta) d\zeta \right) \quad (2.28)$$

Ainsi, on rejoint le chemin emprunté précédemment, le développement asymptotique que l'on vient d'obtenir étant parfaitement identique à celui rapporté plus haut, à l'équation 2.18. Les deux méthodes concordent donc l'une avec l'autre, l'approche exponentielle rejoignant la trigonométrique, et le classique répondant au classique.

Chapitre 3

Cas de l'électron diffusé par un noyau

3.1 Solution exacte du problème

Dans la dernière partie de ce travail, j'entends appliquer les mathématiques discutées dans la section précédente au problème de la diffusion d'une particule chargée par un potentiel électrostatique. Concrètement, on peut imaginer par exemple un électron entrant en collision avec le noyau d'un atome, ce dernier demeurant immobile du fait de sa très grande masse, plusieurs fois supérieure à celle de l'électron. Dans ce cas, le noyau de l'atome génère un potentiel électrostatique, modifiant l'état de l'électron en le diffusant plus ou moins également dans toutes les directions, lorsque celui-ci en vient à passer près du noyau. Plus généralement, lorsqu'une particule de charge Ze rencontre le potentiel électrostatique généré par une charge $Z'e$, l'interaction qui se produit alors met en jeu une énergie potentielle ne dépendant que de la distance r séparant les deux charges, étant égale à

$$V(r) = \frac{\alpha}{r}, \quad \alpha = \frac{ZZ'e^2}{4\pi\epsilon_0} \quad (3.1)$$

On a cru bon de noter par α la constante de proportionnalité reliant l'inverse de la distance et le potentiel électrostatique mis en oeuvre dans la collision. En plus de correspondre à la notation utilisée au début de ce travail, pour exprimer le premier terme du développement en série d'un potentiel central quelconque s'annulant loin de l'origine, la présente notation rappelle également celle communément employée pour désigner la constante de structure fine. En effet, la constante α indiquée dans l'équation précédente est égale à la constante de structure fine, multipliée par ZZ' , du moins dans le cadre de la convention selon laquelle $\hbar = c = 1$. Bref, étant donné le potentiel électrostatique que l'on vient d'énoncer, l'état de la particule chargée entrant en contact avec ce potentiel se trouve donc décrit par l'équation suivante (soit l'équation 1.3).

$$\nabla^2\psi + k^2\psi - \frac{2m\alpha}{r}\psi = 0 \quad (3.2)$$

Or, comme on l'a déjà mentionné au tout début de ce travail, il s'avère que cette équation peut être résolue de manière exacte, sans le recours à aucune approximation. À cet égard, le cas du potentiel électrostatique apparaît alors d'autant plus similaire à celui de l'oscillateur harmonique. De même, en effet, que ces deux cas particuliers peuvent être compris comme les premiers termes du développement en série d'un potentiel général, de même aussi ces deux cas

peuvent être résolus sans approximation. Certes, ce fait ne m'était pas entièrement inconnu avant la rédaction de ce travail : la solution exacte de l'équation de Schrödinger pour un potentiel électrostatique est généralement obtenue et démontrée lors de l'étude de l'atome d'hydrogène. Toutefois, la nouveauté discutée dans le présent travail concerne l'obtention de cette solution exacte dans le contexte de la théorie des collisions. Muni de la fonction d'onde exacte décrivant l'état d'une particule diffusée par un potentiel électrostatique, on peut alors notamment calculer la section efficace associée à une telle diffusion, sans toutefois recourir à l'arsenal mathématique mis en branle par l'usage de propagateurs. Cette approche alternative est élégante et mérite qu'on s'y attache.

Bref, sans plus tarder, il est temps de résoudre l'équation de Schrödinger énoncée plus haut, afin de déterminer la fonction d'onde d'une particule chargée diffusée par un potentiel électrostatique. Or, une équation différentielle linéaire de second ordre comme l'équation de Schrödinger possède toujours deux solutions linéairement indépendantes, pouvant être combinées l'une avec l'autre afin de constituer n'importe quelle autre solution de l'équation. Ainsi, le vrai problème consiste à choisir la combinaison linéaire appropriée, construite à partir des deux solutions indépendantes, permettant de reproduire le comportement asymptotique attendu pour la fonction d'onde de la particule diffusée. On veut trouver, autrement dit, une solution dont la forme asymptotique correspond à celle de l'équation 1.5. Pour ce faire¹, l'astuce consiste ici à supposer que la fonction d'onde de la particule s'exprime de la façon suivante :

$$\psi(r, \theta) = e^{ikz} u(r - z) \quad (3.3)$$

où évidemment $z = r \cos \theta$. Certes, cette expression pour la fonction d'onde ne peut être complètement justifiée a priori : il faut vraiment l'essayer et voir ce qui se passe. Toutefois, cette forme constitue tout de même une proposition plutôt sensée, surtout si l'on se dit que la fonction u doit se développer asymptotiquement comme $u(r - z) \sim 1 + f(r - z)$. On parvient alors à reproduire au moins le premier terme du développement asymptotique pour la fonction d'onde, à savoir l'onde incidente se propageant le long de z . Il suffit maintenant d'insérer cette expression pour la fonction d'onde dans l'équation de Schrödinger. En prenant le gradient de la fonction d'onde, on trouve d'abord

$$\nabla \psi = e^{ikz} \nabla u + u \nabla e^{ikz} = e^{ikz} \nabla u + ik \hat{\mathbf{z}} e^{ikz} u \quad (3.4)$$

Ainsi, en prenant la divergence de ce gradient, on calcule le laplacien de la fonction d'onde.

$$\nabla^2 \psi = \nabla \cdot \nabla \psi = \left(\nabla^2 u + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} - k^2 u \right) e^{ikz} \quad (3.5)$$

En insérant cette expression pour le laplacien dans l'équation de Schrödinger, puis en simplifiant partout l'exponentielle e^{ikz} commune à tous les termes, on trouve

$$\nabla^2 u + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{2m\alpha}{r} u = 0 \quad (3.6)$$

1. Cette section s'inspire de N. Mott et H. Massey, *The Theory of Atomic Collisions*, ch. III.

Or, cette équation différentielle peut être grandement simplifiée du fait que $u = u(\zeta)$, où l'on a noté $\zeta = r - z$. Autrement dit, cette équation n'implique vraiment qu'une seule variable et peut donc être ramenée, par une série de dérivations en chaîne, à une équation différentielle ordinaire. Par exemple, en dérivant en chaîne,

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{du}{d\zeta} = \left(\frac{\partial r}{\partial z} - 1 \right) \frac{du}{d\zeta} \quad (3.7)$$

Or, en exprimant la distance r en coordonnées cartésiennes par le moyen du théorème de Pythagore, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, puis en dérivant chaque côté de cette dernière équation par rapport à z , on trouve que

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z - r}{r} \frac{du}{d\zeta} = -\frac{\zeta}{r} \frac{du}{d\zeta} \quad (3.8)$$

De la même façon, on peut calculer le laplacien de la fonction u , de manière à l'exprimer strictement en termes des dérivées première et seconde de u par rapport à la variable ζ . En se servant du fait que $\zeta = r(1 - \cos \theta)$, on trouve d'abord

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial \zeta}{\partial r} \frac{du}{d\zeta} = (1 - \cos \theta) \frac{du}{d\zeta} \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \frac{du}{d\zeta} = r \sin \theta \frac{du}{d\zeta} \quad (3.10)$$

Par le moyen de ces deux dérivées, qu'il suffit d'insérer dans l'expression du laplacien de u en coordonnées sphériques, on peut alors réécrire ce laplacien sous la forme suivante. Le calcul menant à cette expression est tout à fait direct, quoiqu'un peu laborieux, de telle sorte que je ne le reproduis pas ici dans l'ensemble de ses détails.

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \\ &= \frac{2}{r} \frac{du}{d\zeta} + \frac{2\zeta}{r} \frac{d^2 u}{d\zeta^2} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Bref, en combinant les différentes expressions ainsi obtenues, on parvient à réduire l'équation différentielle pour u énoncée plus haut (soit l'équation 3.6) en une équation n'impliquant que des dérivées par rapport à ζ . Si l'on prend la peine de multiplier toute l'équation par $r/2$, on trouve alors

$$\zeta \frac{d^2 u}{d\zeta^2} + (1 - ik\zeta) \frac{du}{d\zeta} - m\alpha u = 0 \quad (3.12)$$

Or, cette équation peut être résolue exactement par la méthode de Frobenius, c'est-à-dire en exprimant la fonction u sous la forme d'une série de puissances de ζ . Cette équation, en effet, possède une singularité non essentielle pour $\zeta = 0$, ce qui rend possible sa résolution par la

méthode de Frobenius. En fait, dans le jargon de la physique mathématique, les deux solutions linéairement indépendantes de cette équation différentielle correspondent aux fonctions hypergéométriques confluentes de première et de seconde espèces. Seule la fonction de première espèce, toutefois, constitue une solution physiquement acceptable, permettant à la fonction d'onde de la particule de demeurer finie partout dans l'espace, y compris à l'origine du repère de coordonnées, où $\zeta = 0$. Ainsi, pour cette raison, on en conclut que $u(\zeta) \propto M(-i\beta, 1, ik\zeta)$, où M est la fonction hypergéométrique confluyente de première espèce, et où l'on a simplement défini $\beta = m\alpha/k = \alpha/v$. L'expression exacte pour la fonction d'onde d'une particule diffusée par un potentiel électrostatique est donc

$$\psi(r, \theta) \propto e^{ikz} M(-i\beta, 1, ik(r-z)) \quad (3.13)$$

La constante de proportionnalité nécessaire afin d'établir l'égalité entre l'expression trouvée et la véritable fonction d'onde de la particule peut être déterminée en considérant le développement asymptotique de la fonction d'onde. En fait, aucun autre moyen n'est proprement envisageable, dans la mesure où les seules propriétés connues pour la fonction d'onde concernent son expression dans la limite où les deux particules impliquées dans la collision se trouvent très loin l'une de l'autre. En fait, à ce stade du raisonnement, on ne peut être encore certain que la solution trouvée est bel et bien celle que l'on recherche. Pour ce faire, il faut vérifier que le développement asymptotique de l'expression trouvée correspond à la forme attendue, dans le cas d'une particule diffusée par un potentiel.

3.2 Développement asymptotique de la solution

Il ne reste donc plus qu'à déterminer la forme asymptotique de la fonction d'onde que l'on vient d'obtenir. Toutefois, afin de recourir aux techniques mathématiques discutées précédemment dans ce travail, je me propose un exercice plus simple et plus général, soit celui consistant à déterminer le comportement asymptotique de n'importe quelle solution de l'équation différentielle établie pour u . Ce faisant, il ne sera pas possible de fixer explicitement la constante de proportionnalité reliant la fonction d'onde et son expression en termes de la fonction hypergéométrique confluyente de première espèce. Néanmoins, on pourra rapidement confirmer que la forme initialement supposée pour la fonction d'onde est bel et bien appropriée pour décrire la diffusion d'une particule chargée par un potentiel électrostatique. Pour ce faire, le plus simple consiste à suivre l'approche exponentielle discutée plus haut. Mais avant de procéder avec ces considérations, il convient de poser $x = k\zeta$, de façon à travailler avec une variable sans dimension. L'équation 3.12 devient alors

$$x u'' + (1 - ix) u' - \beta u \quad (3.14)$$

où u' désigne la dérivée par rapport à x , et où l'on a noté comme précédemment $\beta = \alpha/v$.

En fait, il est possible de procéder beaucoup plus généralement², en considérant à la place de cette dernière équation une autre équation plus générale, possédant elle aussi une singularité à $x = 0$.

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0 \quad (3.15)$$

où f et g sont des fonctions tout à fait générales, mais demeurant finies lorsque la valeur de x devient très élevée. Plus précisément, pour éviter de s'embourber dans un raisonnement risquant de devenir lourd de notations, il est commode de supposer que les fonctions f et g , quoique générales, doivent pouvoir être développées en série de puissances de x , dont les premiers termes sont identifiés explicitement par

$$f(x) = a + \frac{b}{x} + \dots \quad g(x) = \frac{c}{x} + \dots \quad (3.16)$$

Dans ces développements en série, de même que dans le reste de ce raisonnement, on néglige toutes les puissances inverses de x supérieures à la première puissance. Par ailleurs, il convient de remarquer que l'on suppose ici que la fonction g s'annule lorsque x prend de très grandes valeurs, alors que f ne s'annule pas dans cette limite (autrement dit, $a \neq 0$). C'est le cas notamment pour les fonctions impliquées dans l'équation différentielle rencontrée plus haut, dans le contexte de la collision entre une particule chargée et un potentiel. En effet, dans ce cas particulier, on a que $a = -i$, $b = 1$ et $c = -\beta$. Bref, pour déterminer le comportement asymptotique des solutions de l'équation différentielle générale discutée ici, on exprime ces solutions comme l'exponentielle d'une fonction quelconque.

$$y(x) = e^{S(x)} \quad (3.17)$$

En se servant des dérivées de y trouvées précédemment (voir l'équation 2.23), puis en les insérant dans l'équation différentielle décrivant y , on trouve

$$S'' + S'^2 + f(x)S' + g(x) = 0 \quad (3.18)$$

Comme précédemment, l'astuce consiste à négliger la dérivée seconde de la fonction S , lorsque comparée à sa dérivée première. Ce faisant, on se retrouve avec une équation différentielle n'impliquant que S' et son carré. Il est alors possible d'isoler S' en se servant de la formule quadratique.

$$S' \sim -\frac{1}{2}f(x) \pm \frac{1}{2}\sqrt{f(x)^2 - 4g(x)} \quad (3.19)$$

Il est pertinent de simplifier cette expression asymptotique pour S' , en ne conservant que les termes les plus importants, c'est-à-dire ceux variant au plus selon la première puissance inverse de x . On peut notamment développer la racine carrée en série, en ne considérant que ses deux

2. On se base ici sur le raisonnement de F. Olver, *Asymptotics and Special Functions*, ch. 7.

premiers termes. On fait de même aussi pour les fonctions f et g , dont les développements en série ont déjà été rapportés. On trouve alors

$$\begin{aligned}\sqrt{f(x)^2 - 4g(x)} &\sim \sqrt{a^2 + \frac{2ab}{x} - \frac{4c}{x}} \\ &\sim a\sqrt{1 + \frac{2b}{ax} - \frac{4c}{a^2x}} \\ &\sim a + \frac{b}{x} - \frac{2c}{ax}\end{aligned}\quad (3.20)$$

En se servant de cette forme asymptotique en place de la racine carrée impliquée dans l'équation pour S' , on peut alors facilement intégrer cette dernière équation.

$$S_{\pm}(x) \sim -\frac{1}{2}ax - \frac{1}{2}b\log x \pm \left(\frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}b\log x - \frac{c}{a}\log x\right) \quad (3.21)$$

En écrivant séparément chacune des deux solutions ainsi obtenues, on a plutôt

$$S_+(x) \sim -\frac{c}{a}\log x \quad S_-(x) \sim -ax - b\log x + \frac{c}{a}\log x \quad (3.22)$$

Ainsi, tout comme dans l'exemple discuté un peu plus haut, il suffit de prendre l'exponentielle des fonctions S_+ et S_- , puis de combiner linéairement les deux exponentielles ainsi trouvées, de façon à obtenir la forme asymptotique de la solution générale de l'équation différentielle initiale. Autrement dit, toute solution de l'équation différentielle 3.15 se comporte de la manière suivante, lorsque la valeur de x devient très élevée.

$$y(x) = Ae^{S_+} + Be^{S_-} \sim Ae^{-c/a\log x} + \frac{B}{x^b} e^{-ax} e^{c/a\log x} \quad (3.23)$$

On a choisi de présenter le développement asymptotique de la solution générale sous cette forme, en conservant certains logarithmes dans leur exponentielle, parce que cette forme se prête bien au cas particulier émergeant lorsqu'on considère la diffusion d'une particule chargée par un potentiel électrostatique. En effet, dans ce cas, on a que $a = -i$, $b = 1$ et $c = -\beta$, de telle sorte que

$$y(x) \sim Ae^{i\beta\log x} + \frac{B}{x} e^{i(x - \beta\log x)} \quad (3.24)$$

En se rappelant que $x = k\zeta = k(r - z)$, et du fait que la fonction d'onde de la particule est reliée à la fonction y simplement au moyen d'un produit par une simple exponentielle (voir l'équation 3.3), on trouve donc finalement

$$\psi(r, \theta) \sim Ae^{i(kz + \beta\log k(r-z))} + \frac{B}{2kr} \csc^2 \frac{\theta}{2} e^{i(kr - \beta\log k(r-z))} \quad (3.25)$$

où l'on s'est servi de l'identité trigonométrique selon laquelle $1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \theta/2$.

À ce stade, on peut se réjouir d'être parvenu au terme du chemin que l'on se proposait de parcourir. La fonction d'onde possède en effet une forme asymptotique se composant de deux termes, le premier correspondant à la particule incidente se déplaçant vers le potentiel, et le second associé à la particule diffusée à la manière d'une onde sphérique déformée par un certain facteur $f(\theta)$. Certes, la forme asymptotique de la fonction d'onde ne se présente pas exactement comme on l'anticipait. De fait, des phases supplémentaires dépendant du logarithme de ζ affligent chacun des deux termes. Cette différence s'explique simplement par le fait que le potentiel électrostatique, diminuant lentement en r^{-1} , continue d'influencer l'état de la particule même lorsque celle-ci se situe très loin de l'origine. Le même genre de situation problématique, émergeant sous l'effet d'une dépendance selon la première puissance inverse de la variable indépendante, a d'ailleurs été rencontrée plus tôt dans ce travail.

Enfin, pour clore ce travail précisément là où il a commencé, il importe de remarquer que la forme asymptotique trouvée pour la fonction d'onde de la particule reproduit parfaitement la dépendance angulaire du facteur $f(\theta)$, à une constante près. En effet, si l'on fixe $A = 1$, on trouve alors que

$$|f(\theta)| = \frac{|B|}{2k} \csc^2 \frac{\theta}{2} \quad (3.26)$$

La section efficace associée à la diffusion de la particule par le potentiel est calculée en prenant simplement le carré de cette dernière quantité.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 \propto \csc^4 \frac{\theta}{2} \quad (3.27)$$

C'est précisément cette dépendance angulaire pour la section efficace que l'on rencontre à l'équation 8.21 des notes de cours du professeur Marleau, de même aussi que dans le livre d'électrodynamique quantique de Feynman. Ce résultat demeure plutôt modeste, j'en suis conscient, surtout puisque les considérations de ce travail n'ont permis d'obtenir qu'une relation de proportionnalité, en lieu et place d'une véritable égalité. La raison en est, je le rappelle, que le développement asymptotique de la fonction d'onde a été obtenu directement à partir de l'équation différentielle, c'est-à-dire pour sa solution générale, sans considérer la solution particulière choisie pour la fonction d'onde, permettant de garantir qu'elle demeure finie partout dans l'espace. Néanmoins, les mathématiques mobilisées dans ce développement m'apparaissent compenser, par leur simplicité et leur élégance, pour cette proportionnalité à laquelle je m'arrête. Une proportionnalité modeste, certes, mais tout de même exacte.

Bibliographie

Sur la théorie quantique des collisions

N. Mott et H. Massey, *The Theory of Atomic Collisions*, Oxford University Press, 1965.

T. Wu et T. Ohmura, *Quantum Theory of Scattering*, Prentice-Hall, 1962.

R. Feynman, *Quantum Electrodynamics*, W. A. Benjamin, 1961.

R. Newton, *Scattering Theory of Waves and Particles*, Springer, 1982.

L. Marleau, *Introduction à la physique des particules*, Université Laval, 2018.

Sur les mathématiques du développement asymptotique

F. Olver, *Asymptotics and Special Functions*, A. K. Peters, 1997.

R. Wong, *Asymptotic Approximations of Integrals*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.

R. Dingle, *Asymptotic Expansions*, Academic Press, 1973.

R. Courant et D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, vol. 1, Springer, 1937.