

# **Théorie quantique des champs**

Vincent Thibeault 111 100 580

Xavier Roy-Pomerleau 111 103 661

Département de physique, de génie physique et d'optique

Faculté des sciences et de génie, Université Laval

5 avril 2017

## Table des matières

<b>1</b>	<b>L'échec de la mécanique quantique à une particule (Vincent Thibeault)</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Oscillateur harmonique (Xavier Roy-Pomerleau)</b>	<b>8</b>
2.1	Opérateurs de création et d'annihilation de l'oscillateur harmonique . . . . .	8
2.2	Oscillateurs couplés, phonons et espace de Fourier . . . . .	13
2.3	Nombre d'occupation . . . . .	18
<b>3</b>	<b>De l'espace de Fock aux opérateurs de création et d'annihilation : élaboration d'un cadre mathématique pour la théorie quantique des champs (Vincent Thibeault)</b>	<b>20</b>
3.1	Rappel de certaines structures mathématiques et opérations . . . . .	20
3.2	Espace de Fock . . . . .	22
3.2.1	Espace de Fock bosonique . . . . .	25
3.2.2	Espace de Fock fermionique . . . . .	29
3.3	Seconde quantification (Xavier Roy-Pomerleau) . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Notions élémentaires de théorie quantique des champs</b>	<b>33</b>
4.1	Théorie classique des champs (Vincent Thibeault) . . . . .	33
4.2	Théorie quantique des champs et quantification canonique (Vincent Thibeault) .	36
4.3	Application de la théorie quantique des champs (Xavier Roy-Pomerleau) . . . . .	38
	<b>Bibliographie</b>	<b>42</b>

## Introduction

Il est indéniable qu'avec un tel nom, la théorie quantique des champs fasse tourner la tête des physiciens. De plus, sachant qu'elle régit les fondements de la physique des particules moderne ou, si vous préférez, de la physique des fondements de l'univers, il était immanquable d'explorer ce sujet à l'intérieur de notre parcours. Au premier abord, cette théorie est souvent perçue comme extrêmement complexe, voire décourageante, d'où l'apparition de plusieurs livres visant un public plus général. En effet, malgré toute sa puissance, la théorie quantique des champs reste un mariage entre de la physique peu intuitive et des mathématiques avancées et peu connues de la populace (incluant la majorité des physiciens!). Malgré tout, nous avons la conviction que l'élaboration d'un ouvrage plus mathématique, où tous les concepts jugés les plus importants sont définis de manière précise, permet d'établir des bases suffisamment solide pour contempler la beauté de cette théorie. Considérant l'étendu du sujet, la majorité de la théorie sera laissée de côté, comme par exemple toute l'approche intégrale de chemin, pour se concentrer sur les manifestations des opérateurs de création et d'annihilation dans la théorie et sur la quantification canonique, tout en établissant certaines bases mathématiques formelles. Avant toute chose, le but est d'introduire les éléments qui nous permettent de faire un pas de plus vers la théorie quantique des champs. Nous explorons d'abord d'où provient (en partie) la nécessité de cette théorie dans le premier chapitre et, dans le second, nous réactivons certaines notions de physique pour finalement en arriver à la pièce de résistance, c'est-à-dire l'espace de Fock, sur lequel est basé la théorie. Ce dernier chapitre étant très mathématique, nos esprits de physiciens peuvent rester sur leur faim. C'est pourquoi nous finirons avec un exemple concret prenant pour appui les constructions mathématiques et les intuitions établies dans les sections précédentes.

# 1 L'échec de la mécanique quantique à une particule (Vincent Thibeault)

Bien que la mécanique quantique à une particule soit un progrès idéologique extraordinaire dans l'histoire de la science, elle ne parvient pas inclure une autre avancée d'importance majeure : la relativité restreinte. Pour le montrer, il suffit de faire évoluer une particule dans l'espace-temps. Effectivement, si la particule a une probabilité non nulle de se propager à l'extérieur du cône de lumière, alors cela sonnera la mort de la théorie à une particule [6]. Tout d'abord, l'évolution temporelle d'un système quantique est donnée par l'équation de Schrödinger

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$$

où  $\hat{H}$  est l'hamiltonien. La solution à l'équation de Schrödinger pour une particule évoluant d'un temps  $t_0$  à  $t$  est de la forme

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}(t-t_0)} |\psi(t_0)\rangle$$

où  $e^{-i\hat{H}(t-t_0)}$  est l'opérateur d'évolution temporelle. En représentation position, la fonction d'onde s'écrit

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \langle \mathbf{x} | \psi(t) \rangle.$$

De plus, une particule positionnée à l'origine de l'espace-temps est notée

$$|\psi(0)\rangle = |\mathbf{x} = \mathbf{0}\rangle = |\mathbf{0}\rangle.$$

Ainsi, l'amplitude de probabilité de trouver une particule à une position  $\mathbf{x}$  après avoir évolué pendant un temps  $t$  est

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \langle \mathbf{x} | \psi(t) \rangle = \langle \mathbf{x} | e^{-i\hat{H}t} | \mathbf{0} \rangle$$

Comme on exprimera l'énergie relativiste selon la quantité de mouvement, soit  $E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ , on change de représentation. Pour ce faire, on utilise la relation  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{p} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$  dans laquelle on assume une certaine normalisation. Ce choix ne nous fait pas perdre de généralité étant donné que l'on veut prouver que l'on obtient une probabilité non nulle. On se servira aussi du fait que  $E_{\mathbf{p}}$  est la valeur propre de  $\hat{H}$  en représentation quantité de mouvement, c'est-à-dire que  $\hat{H} |\mathbf{p}\rangle = E_{\mathbf{p}} |\mathbf{p}\rangle$ . En écrivant l'amplitude de probabilité sous la forme intégrale et en y insérant une relation de fermeture  $\int |\mathbf{p}\rangle \langle \mathbf{p}| d^3\mathbf{p}$ , on a

$$\begin{aligned}
\psi(\mathbf{x}, t) &= \iiint_{-\infty}^{\infty} \langle \mathbf{x} | e^{-i\hat{H}t} | \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{p} | \mathbf{0} \rangle d^3 \mathbf{p} \\
&= \iiint_{-\infty}^{\infty} \langle \mathbf{x} | \mathbf{p} \rangle e^{-iE_{\mathbf{p}}t} \langle \mathbf{p} | \mathbf{0} \rangle d^3 \mathbf{p} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} e^{-iE_{\mathbf{p}}t} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{0}} d^3 \mathbf{p} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} e^{-iE_{\mathbf{p}}t} d^3 \mathbf{p} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} |\mathbf{p}|^2 e^{i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|\cos\theta} e^{-iE_{\mathbf{p}}t} d\phi d(\cos\theta) d|\mathbf{p}| \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} |\mathbf{p}|^2 \left[ \frac{e^{i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|\cos\theta}}{i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|} \right] \Big|_{-1}^1 e^{-iE_{\mathbf{p}}t} d|\mathbf{p}| \\
&= \frac{-i}{(2\pi)^2 |\mathbf{x}|} \int_0^{\infty} |\mathbf{p}| \left( e^{i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|} - e^{-i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|} \right) e^{-iE_{\mathbf{p}}t} d|\mathbf{p}| \\
&= \frac{-i}{(2\pi)^2 |\mathbf{x}|} \int_0^{\infty} |\mathbf{p}| e^{i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|} e^{-it\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}} d|\mathbf{p}|
\end{aligned}$$

Cette dernière intégrale peut se résoudre avec les méthodes de l'analyse complexe. Tout d'abord, on introduit la fonction  $f(|\mathbf{p}|)$ , où  $|\mathbf{p}|$  est étendu au plan complexe, que l'on peut manipuler comme suit :

$$f(|\mathbf{p}|) = |\mathbf{p}| e^{i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|} e^{-it\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}} = |\mathbf{p}| e^{i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|} e^{-it\sqrt{|\mathbf{p}+im}\sqrt{|\mathbf{p}-im}}.$$

Le défi sera donc d'évaluer l'intégrale complexe  $\oint_C f(|\mathbf{p}|) d|\mathbf{p}|$  sur un contour  $C$ . Avant de choisir le contour d'intégration, regardons les singularités de cette fonction. On voit bien qu'il n'y a aucun pôle. Cependant, la fonction est multiforme en raison du terme  $e^{-it\sqrt{|\mathbf{p}+im}\sqrt{|\mathbf{p}-im}}$  et possède donc des points de branchement à  $|\mathbf{p}| = \pm im$ . En effet, soit  $|\mathbf{p}|_i = im + re^{i\theta}$  un contour autour de la singularité à  $im$  et soit  $|\mathbf{p}|_f = im + re^{i(\theta+2\pi)}$  un même contour, mais après avoir parcouru un cycle. Alors, on a que

$$\begin{aligned}
f(|\mathbf{p}|_i) &= |\mathbf{p}|_i e^{i|\mathbf{p}|_i|\mathbf{x}|} e^{-it\sqrt{|\mathbf{p}|_i+im}\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}} \\
f(|\mathbf{p}|_f) &= |\mathbf{p}|_f e^{i|\mathbf{p}|_f|\mathbf{x}|} e^{-it\sqrt{|\mathbf{p}|_f+im}\sqrt{r}e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)}} = |\mathbf{p}|_i e^{i|\mathbf{p}|_i|\mathbf{x}|} e^{it\sqrt{|\mathbf{p}|_i+im}\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}} \neq f(|\mathbf{p}|_i)
\end{aligned}$$

On a donc bel et bien un point de branchement (il est d'ailleurs d'ordre 2), car la fonction ne revient pas à sa valeur initiale après un cycle (on change donc de feuillet de Riemann). De façon analogue, on sait que  $-im$  est aussi un point de branchement. Pour rendre la fonction uniforme, on introduit une coupure entre nos deux points de branchement en passant par l'infini (cela s'imagine bien en termes de plan complexe compactifié sur la sphère  $S^2$ ). On choisit donc le contour de la figure 1 de sorte qu'on puisse l'étendre de  $-\infty$  à  $\infty$  (évidemment, on veut retrouver l'intégrale réelle de notre problème)[6] [7].

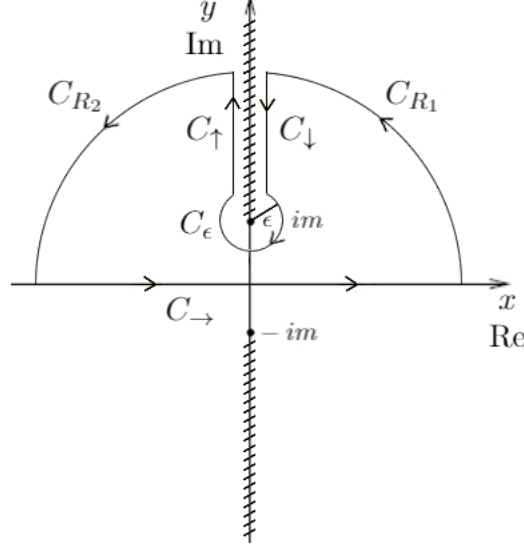


FIGURE 1 – Contour d'intégration  $C$  pour trouver l'amplitude de probabilité  $\psi(\mathbf{x}, t)$ .

Puisque la fonction  $f(|\mathbf{p}|)$  est analytique à l'intérieur du contour, le théorème de Cauchy nous indique que,

$$\oint_C f(|\mathbf{p}|) d|\mathbf{p}| = 0.$$

En développant le contour d'intégration, on a

$$\left\{ \int_{C_{\rightarrow}} + \int_{C_{R_1}} + \int_{C_{\downarrow}} + \int_{C_{\epsilon}} + \int_{C_{\uparrow}} + \int_{C_{R_2}} \right\} |\mathbf{p}| e^{i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|} e^{-it\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}} d|\mathbf{p}| = 0.$$

Quand  $\epsilon \rightarrow 0$ , la longueur totale du parcours sur  $C_{\epsilon}$ ,  $L_{C_{\epsilon}}$ , tend vers 0. Puisque

$$\left| \int_{C_{\epsilon}} f(|\mathbf{p}|) d|\mathbf{p}| \right| \leq \max_{C_{\epsilon}} |f(|\mathbf{p}|)| \cdot L_{C_{\epsilon}}$$

par l'inégalité de Darboux, alors nécessairement l'intégrale sur  $C_{\epsilon}$  doit tendre vers 0 [10]. De plus, le terme  $e^{i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|}$  décroît exponentiellement lorsque l'on a de grandes valeurs imaginaires de  $|\mathbf{p}|$ . En effet, si on écrit  $|\mathbf{p}| = p_x + ip_y$ , si  $ip_y$  est grand et puisque  $|\mathbf{x}| > 0$ , alors  $e^{i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|} = e^{-p_y|\mathbf{x}|} \rightarrow 0$ . Pour ce qui est du terme  $e^{-it\sqrt{|\mathbf{p}|+im}\sqrt{|\mathbf{p}|-im}}$ , il décroît si on augmente la partie imaginaire de  $|\mathbf{p}|$  à gauche de la coupure et donc, par le lemme de Jordan, l'intégrale sur  $C_{R_1}$  est nulle. Sur le contour à droite de la coupure, le terme  $e^{-it\sqrt{|\mathbf{p}|+im}\sqrt{|\mathbf{p}|-im}}$  croît. Heureusement, cela ne cause pas problème étant donné que le terme  $e^{i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|} e^{-it\sqrt{|\mathbf{p}|+im}\sqrt{|\mathbf{p}|-im}}$  décroît. En effet, cette

décroissance s'explique par le fait que la particule se propage à l'extérieur du cône de lumière et donc  $|\mathbf{x}| > t$ . Autrement dit, l'exponentielle  $e^{i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|}$  décroît plus rapidement que l'exponentielle en  $t$  augmente. Ainsi, par le lemme de Jordan, encore une fois, l'intégrale sur  $C_{R_2}$  est nulle [6] [7]. Il en résulte que

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_{C_{\rightarrow}} + \int_{C_{\downarrow}} + \int_{C_{\uparrow}} \right\} |\mathbf{p}| e^{i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|} e^{-it\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}} d|\mathbf{p}| = 0 \\ - \left\{ \int_{C_{\downarrow}} + \int_{C_{\uparrow}} \right\} |\mathbf{p}| e^{i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|} e^{-it\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}} d|\mathbf{p}| &= \int_{C_{\rightarrow}} |\mathbf{p}| e^{i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|} e^{-it\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}} d|\mathbf{p}| \\ &= \int_{-R}^R |\mathbf{p}| e^{i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|} e^{-it\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}} d|\mathbf{p}| \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{p}| e^{i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|} e^{-it\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}} d|\mathbf{p}| \end{aligned}$$

où, à la dernière ligne, on a utilisé le fait que  $R$  tend vers l'infini. On retrouve donc, à une constante près, l'amplitude de probabilité  $\psi(\mathbf{x}, t)$  et on peut donc écrire

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, t) &= \frac{i}{(2\pi)^2|\mathbf{x}|} \left\{ \int_{C_{\downarrow}} + \int_{C_{\uparrow}} \right\} |\mathbf{p}| e^{i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|} e^{-it\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}} d|\mathbf{p}| \\ &= \frac{i}{(2\pi)^2|\mathbf{x}|} \left\{ \int_{iR}^{im+\epsilon} + \int_{im+\epsilon}^{iRe^{2\pi}} \right\} |\mathbf{p}| e^{i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|} e^{-it\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}} d|\mathbf{p}| \\ &= \frac{i}{(2\pi)^2|\mathbf{x}|} \left\{ - \int_{im}^{iR} + \int_{im}^{iRe^{2\pi}} \right\} |\mathbf{p}| e^{i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|} e^{-it\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}} d|\mathbf{p}| \quad (\because \epsilon \rightarrow 0) \\ &= \frac{i}{(2\pi)^2|\mathbf{x}|} \left[ - \int_{im}^{iR} |\mathbf{p}| e^{i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|} e^{-it\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}} d|\mathbf{p}| + \int_{im}^{iRe^{2\pi}} |\mathbf{p}| e^{i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|} e^{-it\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}} d|\mathbf{p}| \right] \end{aligned}$$

D'une part, on pose  $z_{\downarrow} = |\mathbf{p}|^2 + m^2 = ye^{i\frac{\pi}{2}}$  et d'autre part, on pose  $z_{\uparrow} = |\mathbf{p}|^2 + m^2 = ye^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi)} = z_{\downarrow}e^{2\pi i}$ . Aussi,  $d|\mathbf{p}| = dz_{\downarrow}/(2\sqrt{z_{\downarrow}-m^2})$ . On a donc

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, t) &= \frac{i}{(2\pi)^2|\mathbf{x}|} \left[ - \int_0^{-R^2+m^2} \frac{1}{2} e^{i\sqrt{z_{\downarrow}-m^2}|\mathbf{x}|} e^{-it\sqrt{z_{\downarrow}}} dz_{\downarrow} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{-R^2+m^2} \frac{1}{2} e^{i\sqrt{z_{\uparrow}-m^2}|\mathbf{x}|} e^{-it\sqrt{z_{\downarrow}}e^{i\pi}} dz_{\downarrow} \right] \\ &= \frac{i}{(2\pi)^2|\mathbf{x}|} \left[ - \int_0^{-R^2+m^2} \frac{1}{2} e^{i\sqrt{z_{\downarrow}-m^2}|\mathbf{x}|} e^{-it\sqrt{z_{\downarrow}}} dz_{\downarrow} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{-R^2+m^2} \frac{1}{2} e^{i\sqrt{z_{\downarrow}-m^2}|\mathbf{x}|} e^{it\sqrt{z_{\downarrow}}} dz_{\downarrow} \right] \end{aligned}$$

En revenant en fonction de  $|\mathbf{p}|$ , on arrive donc à l'expression :

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{i}{(2\pi)^2 |\mathbf{x}|} \int_{im}^{iR} |\mathbf{p}| e^{i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|} \left( e^{it\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}} - e^{-it\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}} \right) d|\mathbf{p}|$$

En prenant  $R \rightarrow \infty$  et en posant  $|\mathbf{p}| = iz$ , on obtient

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, t) &= \frac{i}{(2\pi)^2 |\mathbf{x}|} \int_m^\infty (iz) e^{-z|\mathbf{x}|} \left( e^{t\sqrt{z^2-m^2}} - e^{-t\sqrt{z^2-m^2}} \right) idz && (\because |\mathbf{p}| = iz) \\ &= \frac{-i}{2\pi^2 |\mathbf{x}|} e^{-m|\mathbf{x}|} \int_m^\infty z e^{-(z-m)|\mathbf{x}|} \sinh \left( t\sqrt{z^2 - m^2} \right) dz \\ &= \frac{-i}{2\pi^2 |\mathbf{x}|} \left( \frac{m|\mathbf{x}| + 1}{|\mathbf{x}|^2} \sinh \left( t\sqrt{z^2 - m^2} \right) \right) e^{-m|\mathbf{x}|} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

La probabilité  $|\psi(\mathbf{x}, t)|^2$  d'avoir une particule en dehors du cône de lumière est donc non nulle. La démarche était assez ardue, mais le résultat qui en découle est très important : la mécanique quantique à une particule échoue à inclure la relativité restreinte puisqu'il y a une probabilité non nulle de retrouver une particule à l'extérieur du cône de lumière [6] [7]. Évidemment, on ne s'avouera pas vaincu ! Notre cheval de bataille sera la théorie quantique des champs : une théorie à plusieurs particules où les champs sont définis localement de sorte qu'il n'y ait pas de propagation plus rapide que la vitesse de la lumière. En effet, plus loin dans cet ouvrage, on devra trouver des opérateurs qui sont définis aux différentes positions dans l'espace-temps et aussi un espace dans lequel il est possible de faire varier le nombre de particules. Par contre, avant de s'attaquer à la théorie quantique des champs, il est pertinent de faire un léger détour vers l'oscillateur harmonique.

## 2 Oscillateur harmonique (Xavier Roy-Pomerleau)

Afin de progresser tranquillement vers cette théorie, nous pouvons analyser un concept fondamental et très pratique en physique, c'est-à-dire l'oscillateur harmonique. En effet, ce dernier est un élément clé à l'intérieur de nombreuses sphères de la physique. La mécanique quantique et même la théorie quantique des champs n'y échappent pas. Plus précisément, le traitement de l'oscillateur harmonique nous permet d'arriver à une version de base des opérateurs de création et d'annihilation. Comme le présent ouvrage se concentre sur l'obtention de ces mêmes opérateurs pour la théorie quantique des champs, il est pertinent d'aborder le sujet graduellement en partant de certains résultats de la mécanique quantique.

### 2.1 Opérateurs de création et d'annihilation de l'oscillateur harmonique

Il existe une panoplie de processus physiques qui, de près ou de loin, possèdent un régime dans lequel nous pouvons modéliser l'ensemble du problème par des résultats propres aux oscilla-



teurs harmoniques [1]. Dans le cas de la mécanique quantique, on peut facilement penser aux résonateurs de Planck dans une cavité [1]. N'ayant pas un désir particulier de réinventer la roue, nous utiliserons le bon vieux système masse-ressort afin d'arriver aux résultats escomptés. Comme cette rubrique se veut seulement une simple réactivation des notions de base, nous utiliserons des formules sans les démontrer. Néanmoins, nous obtiendrons des résultats qui nous permettront d'appriivoiser graduellement la théorie quantique des champs. Commençons alors par l'hamiltonien classique de l'oscillateur harmonique qui s'écrit comme ceci :

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2. \quad (2.1)$$

Or, comme nous souhaitons travailler dans le formalisme de la mécanique quantique, nous avons que  $H$ ,  $p$  et  $x$  sont des opérateurs. Nous les rebaptiserons alors respectivement  $\hat{H}$ ,  $\hat{p}$  et  $\hat{x}$ , de sorte que nous obtenons :

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{x}^2. \quad (2.2)$$

L'équation aux valeurs propres correspondante s'écrit alors comme :

$$\hat{H} |\psi\rangle = E |\psi\rangle. \quad (2.3)$$

où  $E = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega$  [1].

Afin d'aller plus loin, nous allons maintenant factoriser le côté droit de l'hamiltonien comme ceci :

$$\frac{1}{2}m\omega^2 \left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right) \left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right). \quad (2.4)$$

Or, comme les opérateurs de position  $\hat{x}$  et de quantité de mouvement  $\hat{p}$  ne commutent pas, la dernière expression donne plutôt :

$$\frac{1}{2}m\omega^2 \hat{x} + \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{i\omega}{2} [\hat{x}, \hat{p}]. \quad (2.5)$$

où la valeur du dernier commutateur est  $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$  [1].

Ainsi, si une telle factorisation est utilisée, nous devons plutôt écrire :

$$\hat{H} - \frac{\hbar\omega}{2} = \frac{1}{2}m\omega^2 \left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right) \left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right). \quad (2.6)$$

Il est à noter que cela correspond à la soustraction de la valeur de l'énergie pour  $n = 0$ . Sous cette forme, nous voyons donc apparaître les fameux opérateurs de création et d'annihilation, qui sont contenus dans les parenthèses [6]. Pour aller plus loin, on met en évidence  $\hbar$  et  $\omega$  pour obtenir :

$$\hat{H} - \frac{\hbar\omega}{2} = \hbar\omega \left[ \frac{1}{2\hbar} m\omega \left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right) \left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right) \right]. \quad (2.7)$$

Sous cette forme, nous pouvons donc extraire les opérateurs tant convoités que nous nommons, de façon standard,  $\hat{a}$  et  $\hat{a}^\dagger$  :

$$\begin{aligned}\hat{a} &\equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( \hat{x} + \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right), \\ \hat{a}^\dagger &\equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( \hat{x} - \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right).\end{aligned}\tag{2.8}$$

En utilisant ces deux résultats, il est possible d'inverser les relations pour trouver  $\hat{x}$  et  $\hat{p}$  afin de récrire l'hamiltonien en fonction des opérateurs  $\hat{a}^\dagger$  et  $\hat{a}$ . En effet, de la première relation, on trouve :

$$\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \hat{a} - \hat{x} = \frac{i}{m\omega} \hat{p},\tag{2.9}$$

que l'on peut injecter dans la seconde relation pour obtenir :

$$\begin{aligned}\hat{a}^\dagger &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( \hat{x} - \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \hat{a} + \hat{x} \right), \\ \Rightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) &= \hat{x}.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Effectuons alors un travail similaire pour  $\hat{p}$ . De la définition de  $\hat{a}$ , on a :

$$\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \hat{a} - \frac{i}{m\omega} \hat{p} = \hat{x},\tag{2.11}$$

qui une fois placée dans l'autre définition donne :

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \hat{a}^\dagger &= \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \hat{a} - \frac{i}{m\omega} \hat{p} - \frac{i}{m\omega} \hat{p}, \\ \Rightarrow \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}) &= -2 \frac{i}{m\omega} \hat{p}, \\ \Rightarrow -i \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) &= \hat{p}.\end{aligned}\tag{2.12}$$

À l'aide de ces résultats, nous pouvons alors écrire l'hamiltonien en fonction de ces opérateurs :

$$\begin{aligned}\hat{H} - \frac{\hbar\omega}{2} &= \hbar\omega \left[ \frac{1}{2\hbar} m\omega \left( \hat{x} - \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right) \left( \hat{x} + \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right) \right], \\ \hat{H} - \frac{\hbar\omega}{2} &= \hbar\omega \left[ \frac{m\omega}{2\hbar} \left( \hat{x}^2 + \frac{i}{m\omega} [\hat{p}, \hat{x}] + \frac{1}{m^2\omega^2} \hat{p}^2 \right) \right],\end{aligned}$$

où le terme  $\frac{\hbar\omega}{2}$  s'est annulé avec le terme contenant le commutateur à droite laissant :

$$\hat{H} = \hbar\omega \left[ \frac{m\omega}{2\hbar} \left( \hat{x}^2 + \frac{1}{m^2\omega^2} \hat{p}^2 \right) \right],$$

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \hbar\omega \left[ \frac{m\omega}{2\hbar} \left( \frac{\hbar}{2m\omega} (\hat{a}^\dagger + \hat{a})^2 - \frac{1}{m^2\omega^2} \frac{\hbar m\omega}{2} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)^2 \right) \right], \\
\hat{H} &= \frac{\hbar\omega}{4} \left[ (\hat{a}^\dagger + \hat{a})^2 - (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)^2 \right], \\
\hat{H} &= \frac{\hbar\omega}{4} \left[ \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger + \hat{a} \hat{a} - \hat{a} \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \right], \\
\hat{H} &= \frac{\hbar\omega}{2} \left[ \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger \right]. \tag{2.13}
\end{aligned}$$

Nous avons alors besoin de la relation de commutation entre les opérateurs  $\hat{a}$  et  $\hat{a}^\dagger$  :

$$\begin{aligned}
[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] &= \hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a}, \\
&= \frac{m\omega}{2\hbar} \left[ \left( \hat{x} + \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right) \left( \hat{x} - \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right) - \left( \hat{x} - \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right) \left( \hat{x} + \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right) \right], \\
&= \frac{m\omega}{2\hbar} \left[ \frac{2i}{m\omega} \hat{p} \hat{x} - \frac{2i}{m\omega} \hat{x} \hat{p} \right], \\
&= \frac{i}{\hbar} [\hat{p} \hat{x} - \hat{x} \hat{p}], \\
&= \frac{i}{\hbar} [-[\hat{x}, \hat{p}]], \\
&= \frac{-i}{\hbar} \cdot i\hbar = 1. \tag{2.14}
\end{aligned}$$

De sorte que, dans l'hamiltonien, nous pouvons utiliser la relation  $\hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} = 1 \Rightarrow \hat{a} \hat{a}^\dagger = 1 + \hat{a}^\dagger \hat{a}$ . Ainsi, l'hamiltonien devient finalement :

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \frac{\hbar\omega}{2} \left[ \hat{a}^\dagger \hat{a} + (1 + \hat{a}^\dagger \hat{a}) \right], \\
\hat{H} &= \hbar\omega \left[ \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right]. \tag{2.15}
\end{aligned}$$

En règle générale, on renomme l'opérateur  $\hat{a}^\dagger \hat{a}$  comme  $\hat{n}$  [1][6], ce qui fait en sorte que l'hamiltonien peut s'écrire sous la forme très élégante suivante :

$$\hat{H} = \hbar\omega \left[ \hat{n} + \frac{1}{2} \right]. \tag{2.16}$$

Évidemment, comme il s'agit toujours de l'hamiltonien, l'équation aux valeurs propres prend la forme :

$$\hat{H} |\psi_n\rangle = \hbar\omega \left[ n + \frac{1}{2} \right] |\psi_n\rangle. \tag{2.17}$$

À l'aide de toutes ces expressions, nous pouvons finalement nous concentrer sur l'interprétation des opérateurs  $\hat{a}$  et  $\hat{a}^\dagger$ . D'abord, considérons le vecteur défini par  $\hat{a}^\dagger |\psi_n\rangle$ . Si nous lui appliquons l'opérateur  $\hat{n}$  et que l'on utilise la relation de commutation entre  $\hat{a}$  et  $\hat{a}^\dagger$ , on trouve :

$$\hat{n}\hat{a}^\dagger |\psi_n\rangle = \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger |\psi_n\rangle = \hat{a}^\dagger(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1) |\psi_n\rangle = (n+1)\hat{a}^\dagger |\psi_n\rangle, \quad (2.18)$$

où nous avons considéré que la valeur propre de l'opérateur  $\hat{n}$  sur  $|\psi_n\rangle$  est  $n$  [1][6].

Cela nous indique alors que le vecteur  $\hat{a}^\dagger |\psi_n\rangle$  est bien un vecteur propre de l'opérateur  $\hat{n}$ , mais dont la valeur propre est plus élevée d'un entier. De plus,  $\hat{a}^\dagger |\psi_n\rangle$  étant un vecteur propre de  $\hat{n}$ , il l'est aussi pour l'hamiltonien. Il est alors possible de faire un pont entre cette dernière expression et l'application de l'opérateur  $\hat{n}$  sur  $|\psi_{n+1}\rangle$ . En effet,  $\hat{n} |\psi_{n+1}\rangle = (n+1) |\psi_{n+1}\rangle$ , ce qui laisse présager une correspondance entre  $\hat{a}^\dagger |\psi_n\rangle$  et  $|\psi_{n+1}\rangle$ . On peut effectuer un travail similaire avec l'opérateur  $\hat{a}$  [6] pour obtenir une équation de la forme :

$$\hat{n}\hat{a} |\psi_n\rangle = (n-1)\hat{a} |\psi_n\rangle. \quad (2.19)$$

À l'inverse de  $\hat{a}^\dagger |\psi_n\rangle$ , on constate donc que  $\hat{a} |\psi_n\rangle$  correspond à un vecteur dont la valeur propre avec l'opérateur  $\hat{n}$  est réduite d'un entier. Ces deux derniers résultats nous permettent alors de percevoir un peu plus pourquoi nous avons utilisé les termes « création » et « annihilation ». En fait, afin de comprendre réellement d'où ces termes proviennent, il ne reste qu'à normaliser efficacement ces opérateurs. Partant des résultats précédents, on écrit :

$$\hat{a}^\dagger |\psi_n\rangle = c |\psi_{n+1}\rangle, \quad (2.20)$$

où  $c$  est une constante qui reste à déterminer. Trouvons alors la norme au carré de cette expression :

$$\begin{aligned} \langle \psi_n | \hat{a}\hat{a}^\dagger |\psi_n\rangle &= \langle \psi_n | (\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1) |\psi_n\rangle, \\ &= \langle \psi_n | \hat{n} |\psi_n\rangle + \langle \psi_n | \psi_n\rangle, \\ &= \langle \psi_n | n |\psi_n\rangle + 1 = n + 1. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Or, nous avons aussi que :

$$\begin{aligned} |\hat{a}^\dagger |\psi_n\rangle|^2 &= |c |\psi_{n+1}\rangle|^2, \\ \langle \psi_{n+1} | c^2 |\psi_{n+1}\rangle &= c^2. \end{aligned} \quad (2.22)$$

En égalisant les équations 2.21 et 2.22 on tire que  $c = \sqrt{n+1}$ . On peut effectuer le même traitement pour l'opérateur  $\hat{a}$  et obtenir que la constante est égale à  $\sqrt{n}$  [6][1].

Nous sommes fin prêts à observer pour une première fois la puissance des opérateurs de création et d'annihilation. Soit  $|\psi_0\rangle$ , l'état fondamental de l'oscillateur harmonique. Alors, si nous utilisons l'opérateur de création, nous obtenons :

$$\hat{a}^\dagger |\psi_0\rangle = |\psi_1\rangle.$$

De même, si nous l'appliquons de nouveau sur ce nouvel état :

$$\hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger |\psi_0\rangle = \hat{a}^\dagger |\psi_1\rangle = \sqrt{2} |\psi_2\rangle.$$

Si nous effectuons cette opération  $n$  fois, nous obtenons alors :

$$(\hat{a}^\dagger)^n |\psi_0\rangle = \sqrt{n!} |\psi_n\rangle,$$

ce qui nous permet d'écrire n'importe quel état de l'oscillateur harmonique en utilisant :

$$|\psi_n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |\psi_0\rangle \quad (2.23)$$

Autrement dit, au sein de notre oscillateur, nous ajoutons ou *créons* des quanta d'énergie, puisque l'énergie est quantifiée! À l'inverse, si nous appliquons l'opérateur d'annihilation sur l'état  $\psi_n$ , nous obtenons :

$$\hat{a} \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |\psi_0\rangle = \hat{a} |\psi_n\rangle = \sqrt{n} |\psi_{n-1}\rangle = \frac{\sqrt{n} (\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |\psi_0\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} |\psi_0\rangle. \quad (2.24)$$

Dès lors, en appliquant  $\hat{a}$  sur l'état  $n$  de notre oscillateur harmonique, nous avons retiré ou *annihilé* un quanta d'énergie! Il est à noter que cette démarche est généralisable pour un système possédant plusieurs oscillateurs harmoniques non-couplés [1][6]. Le cheminement pour y arriver ne sera pas fait ici, mais permet d'obtenir une forme similaire.

Ce tour de piste nous a donc permis d'apprivoiser les opérateurs de création et d'annihilation qui reviendront prochainement, mais dans un dessein plus grand que celui de l'oscillateur harmonique.

## 2.2 Oscillateurs couplés, phonons et espace de Fourier

Après l'oscillateur harmonique, il est pertinent d'étudier le cas des oscillateurs couplés. Ces derniers nous permettent de nous familiariser avec des notions importantes pour être confortables avec les éléments de la théorie quantique des champs. Malgré son importance, l'oscillateur harmonique ne peut pas tout résoudre et les résultats trouvés précédemment tombent un peu à plat lorsqu'il est question d'étudier des systèmes complexes. En effet, il n'est pas rare de se retrouver devant un système qui comporte plusieurs particules! Nous avons donc besoin de quelque chose d'un peu plus substantiel pour analyser les situations où des corps interagissent entre eux. Nous développerons donc des résultats en utilisant une analyse standard dans la physique de l'état solide, c'est-à-dire l'étude de la chaîne linéaire [5]. À l'image de ce que nous avons fait dans la rubrique précédente, nous allons donc utiliser une chaîne de  $N$  sphères de masse  $m$  reliées par des ressorts de constante  $K$ . Lorsque ces masses sont à leur position d'équilibre, on peut écrire leur position comme  $na$ , où  $a$  est la longueur entre deux masse et  $n$  est l'indice de la sphère en

question. L'hamiltonien total de ce système où chaque sphère est couplée avec ses deux premiers voisins s'écrit alors comme :

$$\hat{H} = \sum_n \frac{\hat{p}_n^2}{2m} + \frac{1}{2}K(\hat{x}_{n+1} - \hat{x}_n)^2, \quad (2.25)$$

où  $\hat{x}_n$  correspond au déplacement de la masse  $n$  par rapport à son point d'équilibre.

Comme nous avons un arrangement périodique de sphères, il peut être intéressant d'analyser le problème dans l'espace de Fourier. Comme nous avons une somme sur des éléments distincts, nous utiliserons la transformée de Fourier discrète ayant la forme suivante pour les variables  $\hat{x}_n$  et  $\hat{p}_n$  [6] :

$$\hat{x}_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k \tilde{x}_k e^{ikna}, \quad (2.26)$$

$$\hat{p}_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k \tilde{p}_k e^{ikna}, \quad (2.27)$$

Les fonctions inverses associées sont donc [6] :

$$\tilde{x}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n \hat{x}_n e^{-ikna}, \quad (2.28)$$

$$\tilde{p}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n \hat{p}_n e^{-ikna}. \quad (2.29)$$

Si nous ajoutons des conditions périodiques à notre chaîne, nous devons imposer le fait que [6] :

$$e^{ikna} = e^{ik(n+N)a} = e^{ikna} e^{ikNa} \Rightarrow e^{ikNa} = 1. \quad (2.30)$$

Or, pour que l'exponentielle en question soit bien égale à 1, nous devons ajouter une condition supplémentaire sur  $k$ . En effet, comme l'exponentielle donne 1, nous devons regarder les cas suivants :

$$e^{ikNa} = 1 \Rightarrow \cos(kNa) = 1 \Rightarrow kNa = 2l\pi \Rightarrow k = \frac{2l\pi}{Na}, \quad (2.31)$$

où  $l \in \mathbb{N}$ . En physique de l'état solide, il est toutefois coutume de limiter l'indice  $l$  de cette manière  $-\frac{N}{2} < l \leq \frac{N}{2}$  [5]. Cela limite donc notre analyse dans ce que l'on appelle la *première zone de Brillouin* [5]. Au-delà de ces valeurs, nous ne faisons que répéter le cycle des valeurs possibles, d'où l'intérêt de ne travailler que dans la première zone. La somme sur les  $n$  de l'exponentielle possède alors un comportement particulier selon la valeur de  $k$ . En effet, de manière générale, nous pouvons écrire :

$$\sum_n e^{ikna} = \sum_n \left( e^{ika} \right)^n, \quad (2.32)$$

où nous reconnaissons la forme d'une série géométrique. Si  $l \neq 0$ , nous pouvons utiliser les résultats connus des sommes partielles finies [10]. Par exemple :

$$\sum_{n=0}^N r^n = \frac{1 - r^N}{1 - r}. \quad (2.33)$$

Si  $r = e^{ika}$  et si  $n$  commence à 0, nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \left(e^{ika}\right)^n &= \frac{1 - \left(e^{ika}\right)^N}{1 - e^{ika}}, \\ &= \frac{1 - \left(e^{\frac{2\pi i}{N}}\right)^N}{1 - e^{\frac{2\pi i}{N}}} = \frac{1 - \left(e^{2\pi i}\right)}{1 - e^{\frac{2\pi i}{N}}}, \\ &= \frac{-e^{i\pi l} \left(e^{i\pi l} - e^{-i\pi l}\right)}{-e^{\frac{i\pi l}{N}} \left(e^{\frac{i\pi l}{N}} - e^{-\frac{i\pi l}{N}}\right)}, \\ &= e^{\frac{i\pi l(N-1)}{N}} \cdot \frac{\sin(l\pi)}{\sin\left(\frac{l\pi}{N}\right)}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Comme  $l$  prend des valeurs entières, on remarque que  $\forall l \neq 0$ , le numérateur est nul, ce qui nous indique que la somme de l'exponentielle l'est aussi. Toutefois, si  $l = 0$ , l'exponentielle est équivalente à l'unité, ce qui fait en sorte que la somme ne peut être traitée avec l'équation 2.34 [10]. En effet, nous devons plutôt revenir à l'équation 2.32, qui nous donne plutôt  $N$ , à condition de sommer jusqu'à  $N - 1$ , ce qui est le cas si nous avons  $N$  sphères et que nous commençons nos indices à  $n = 0$ . Le tout permet alors d'écrire :

$$\sum_n e^{ikna} = N\delta_{k,0}, \quad (2.35)$$

relation dont nous nous servirons plus loin. Cela étant fait, nous pouvons substituer les variables sous leur forme transformée dans l'hamiltonien. Commençons d'abord par traiter le terme d'impulsion :

$$\begin{aligned} \sum_n \hat{p}_n^2 &= \sum_n \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k \tilde{p}_k e^{ikna}\right)^2, \\ &= \frac{1}{N} \sum_n \sum_k \tilde{p}_k e^{ikna} \sum_m \tilde{p}_m e^{imna}, \\ &= \frac{1}{N} \sum_n \sum_k \sum_m \tilde{p}_k \tilde{p}_m e^{i(k+m)na}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Afin d'aller plus loin dans notre développement, nous pouvons utiliser notre fameuse expression du delta de Kronecker, soit l'équation 2.35. En effet, si nous effectuons la somme sur  $n$  avant les autres, on a :

$$\sum_n \hat{p}_n^2 = \sum_k \sum_m \tilde{p}_k \tilde{p}_m \delta_{k,-m}. \quad (2.37)$$

Nous pouvons alors utiliser les propriétés du delta de Kronecker pour obtenir la forme finale, c'est-à-dire :

$$\sum_n \hat{p}_n^2 = \sum_k \sum_{-k} \tilde{p}_k \tilde{p}_{-k}. \quad (2.38)$$

Nous pouvons maintenant effectuer le traitement des variables  $\hat{x}$ . De manière analogue, on trouve [6] :

$$\begin{aligned} \sum_n (x_{n+1} - x_n)^2 &= \frac{1}{N} \sum_n \sum_k \sum_m \tilde{x}_k \tilde{x}_m e^{i(k+m)na} (e^{ika} - 1)(e^{ima} - 1), \\ &= 4 \sum_k \tilde{x}_k \tilde{x}_{-k} \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right). \end{aligned} \quad (2.39)$$

L'hamiltonien final peut donc s'écrire comme :

$$\hat{H} = \sum_k \left[ \frac{1}{2m} \tilde{p}_k \tilde{p}_{-k} + \frac{1}{2} m \omega_k^2 \tilde{x}_k \tilde{x}_{-k} \right], \quad (2.40)$$

où  $\omega_k = \frac{4K}{m} \sin^2(ka/2)$ . Sous cette forme, il semblerait que nous n'avons pas tout à fait réglé le problème. Or, puisque les opérateurs  $\hat{p}_n$  et  $\hat{x}_n$  sont hermitiens, nous avons que  $\tilde{p}_{-k} = \tilde{p}_k^\dagger$  et  $\tilde{x}_{-k} = \tilde{x}_k^\dagger$  [1][6][12]. En effet, en utilisant les définitions en transformée de Fourier, on obtient bien ce résultat [12] :

$$\tilde{x}_k^\dagger = \left[ \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n \hat{x}_n e^{-ikna} \right]^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n \hat{x}_n^\dagger (e^{-ikna})^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n \hat{x}_n e^{ikna} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n \hat{x}_n e^{-i(-k)na} = \tilde{x}_{-k}. \quad (2.41)$$

À l'aide de ces expressions, on peut alors écrire :

$$\hat{H} = \sum_k \left[ \frac{1}{2m} \tilde{p}_k \tilde{p}_k^\dagger + \frac{1}{2} m \omega_k^2 \tilde{x}_k \tilde{x}_k^\dagger \right] \quad (2.42)$$

Sous cette forme, les termes de l'hamiltonien ne sont donc plus couplés! Ainsi, à partir d'un système couplé dans l'espace réel, nous obtenons un système découplé dans l'espace des fréquences en utilisant une transformée de Fourier discrète. Or, nous pouvons aller encore plus loin, puisque cette forme ressemble grandement à celle de l'oscillateur harmonique développée dans la section précédente. Nous pouvons donc utiliser une approche similaire pour récrire le tout à l'aide d'opérateurs d'annihilation et de création. En effet, prenons [6][12] :

$$\tilde{a}_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m \omega_k}} (-i\tilde{p}_k^\dagger + m\omega_k \tilde{x}_k^\dagger) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m \omega_k}} (-i\tilde{p}_{-k}^\dagger + m\omega_k \tilde{x}_{-k}^\dagger), \quad (2.43)$$



et

$$\tilde{a}_k = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega_k}}(i\tilde{p}_k + m\omega_k\tilde{x}_k) \quad (2.44)$$

De la même manière qu'avec l'oscillateur harmonique, on peut inverser les relations de sorte que [6][12] :

$$\tilde{x}_k = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_k}}(\tilde{a}_{-k}^\dagger + \tilde{a}_k), \quad (2.45)$$

et

$$\tilde{p}_k = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega_k}{2}}(\tilde{a}_{-k}^\dagger - \tilde{a}_k) \quad (2.46)$$

De cette manière, on peut écrire l'hamiltonien comme [6][12] :

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_k \left[ \frac{-\hbar\omega_k}{4}(\tilde{a}_{-k}^\dagger - \tilde{a}_k)(\tilde{a}_k^\dagger - \tilde{a}_{-k}) + \frac{\hbar\omega_k}{4}(\tilde{a}_{-k}^\dagger + \tilde{a}_k)(\tilde{a}_k^\dagger + \tilde{a}_{-k}) \right], \\ &= \frac{\hbar}{2} \sum_k \omega_k (\tilde{a}_{-k}^\dagger \tilde{a}_{-k} + \tilde{a}_k \tilde{a}_k^\dagger). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Nous pouvons alors utiliser le commutateur suivant [6][12] :

$$[\tilde{a}_k, \tilde{a}_k^\dagger] = 1, \quad (2.48)$$

et l'équation devient :

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{\hbar}{2} \sum_k \omega_k (\tilde{a}_{-k}^\dagger \tilde{a}_{-k} + (1 + \tilde{a}_{-k}^\dagger, \tilde{a}_{-k})) \\ \hat{H} &= \sum_k \hbar\omega_k (\tilde{a}_{-k}^\dagger \tilde{a}_{-k} + \frac{1}{2}), \end{aligned}$$

et si nous effectuons un changement d'indices :

$$\hat{H} = \sum_k \hbar\omega_k (\tilde{a}_k^\dagger \tilde{a}_k + \frac{1}{2}) \quad (2.49)$$

Nous avons donc obtenu une forme identique à celle de l'oscillateur harmonique. Toutefois, puisque nous sommes dans l'espace des fréquences, nos opérateurs de création et d'annihilation créent ou retirent maintenant des quanta que l'on appelle *phonons* [5][1][6][12]. De plus, l'intérêt ici n'était pas seulement de montrer qu'il était possible de travailler avec un hamiltonien découplé lorsque nous sommes en présence d'un système possédant des composantes couplées, mais aussi de montrer l'espace des fréquences. En effet, il n'est pas rare que les résultats et opérateurs utilisés se situent dans cet espace lorsque nous faisons de la théorie quantique des champs ! Nous reverrons donc cet espace apparaître dans les prochains chapitres.

## 2.3 Nombre d'occupation

Les deux derniers cas traités permettent d'en arriver à un autre élément important. En mécanique quantique, il est coutume de représenter les particules par des fonctions d'ondes sous une notation  $|\psi\rangle$ . Or, un avantage de la théorie quantique des champs réside dans le fait que tout est écrit en terme d'opérateurs. Par exemple, dans le cas de l'oscillateur harmonique, nous avons utilisé la notation  $|\psi_n\rangle$ , ce qui signifiait que nous avons une fonction d'onde  $\psi$  se situant dans le  $n$ -ième niveau d'énergie de l'oscillateur. Si nous avons eu plusieurs oscillateurs harmoniques non couplés, nous aurions pu avoir des oscillateurs contenant le même nombre de quanta d'énergie et d'autres dans des états différents [1]. Pour de telles situations, la notation devient vite lourde. De ce fait, nous favorisons plutôt une notation appelée nombre d'occupation. Dans le cas de l'oscillateur harmonique simple, au lieu d'écrire un ket de la forme  $\psi_k$ , il est plutôt coutume d'écrire un état du système comme :

$$|k\rangle, \quad (2.50)$$

où  $k \in \mathbb{N}$  représente le nombre de quanta dans l'oscillateur. De plus, lorsque l'oscillateur se trouve dans son état d'énergie minimale, on écrit :

$$|0\rangle, \quad (2.51)$$

qui représente la *vacuum state*, ou état du vide. Cet état se retrouve d'ailleurs implicitement dans notre développement de l'oscillateur harmonique. En effet, nous écrivions l'état d'une particule comme 2.23, que nous rappelons ici :

$$|\psi_n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |\psi_0\rangle. \quad (2.52)$$

Or, le fameux  $|\psi_0\rangle$  ne représente que l'état du vide que nous avons écrit comme  $|0\rangle$ . Quoiqu'il en soit, nous sommes alors en mesure d'écrire tous les états de notre oscillateur simple comme :

$$|k\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^k}{\sqrt{k!}} |0\rangle. \quad (2.53)$$

De ce fait, si nous avons un oscillateur contenant 3 quanta, nous aurions :

$$|\psi_3\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^3}{\sqrt{3!}} |\psi_0\rangle = |3\rangle.$$

Évidemment, cette notation prend tout son sens lorsque nous travaillons plutôt avec plusieurs particules. De plus, il est possible d'utiliser la notation pour exprimer un nombre de particules dans d'autres sortes d'états basés sur des unités différentes de celle de l'énergie. Par exemple, nous pouvons créer des particules à une certaine position dans l'espace ou possédant une quantité de mouvement précise. Afin de mieux illustrer ces propos, développons rapidement la théorie

associée à un système constitué de plusieurs oscillateurs harmoniques sans interaction. L'hamiltonien du système correspond donc à la somme des hamiltoniens de chaque oscillateur [6] :

$$\hat{H} = \sum_n \left[ \frac{\hat{p}_n^2}{2m_n} + \frac{1}{2} m_n \omega_n \hat{x}_n^2 \right], \quad (2.54)$$

où  $n$  est l'indice de l'oscillateur considéré. Sans surprise, nous pouvons définir des opérateurs de création et d'annihilation qui agiront sur le  $n$ -ième oscillateur [6]. Respectivement, nous les appellerons  $\hat{a}_n^\dagger$  et  $\hat{a}_n$ . De ce fait, si nous appliquons  $\hat{a}_n^\dagger$ , nous ajoutons un quanta dans le  $n$  ième oscillateur. Avec un peu de travail, nous pouvons donc écrire [6] :

$$\hat{H} = \sum_n \hbar \omega_n \left[ \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n + \frac{1}{2} \right], \quad (2.55)$$

et

$$|k_1, k_2, \dots, k_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{k_1! k_2! \dots k_N!}} (\hat{a}_1^\dagger)^{k_1} (\hat{a}_2^\dagger)^{k_2} \dots (\hat{a}_N^\dagger)^{k_N} |0, 0, \dots, 0\rangle. \quad (2.56)$$

De manière générale, nous écrivons plutôt l'état du vide comme  $|0\rangle$ , même s'il y a plusieurs oscillateurs. De cette manière, on voit que l'on doit appliquer  $k_n$  fois l'opérateur de création sur l'état du vide pour créer  $k_n$  quanta dans le  $n$  ième oscillateur. Avec les exemples donnés, nous arrivons aussi à un résultat fort intéressant. En effet, dans tous les cas, nous sommes partis d'opérateurs appliqués sur l'état du vide pour obtenir l'état désiré. En tant que tel, il n'est donc pas nécessaire d'avoir plus que des opérateurs et l'état du vide pour exprimer la physique derrière une situation ! Par contre, il faut rester vigilant, car bien que nos exemples soient de bons représentants du nombre d'occupation, il faut savoir que le type de particule affecte la manière d'écrire le nombre d'occupation [6]. En effet, la formule avec l'opérateur de création est modifiée avec la nature de particule. Nous en parlerons plus en détail prochainement, mais il est bon d'avoir en tête que les bosons possèdent une fonction d'onde symétrique et que les fermions possèdent une fonction d'onde anti-symétrique [14]. Cela nous met alors déjà la puce à l'oreille pour la forme de la formule de création des fermions que nous verrons dans les sections qui suivent.

### 3 De l'espace de Fock aux opérateurs de création et d'annihilation : élaboration d'un cadre mathématique pour la théorie quantique des champs (Vincent Thibeault)

Le but ici est d'étudier certains fondements mathématiques de la théorie quantique des champs pour pouvoir mieux comprendre comment agissent les opérateurs de création et d'annihilation dans une théorie à plusieurs particules. Pour ce faire, on introduira un espace dans lequel on peut manipuler non seulement les états à une seule particule, mais aussi à plusieurs particules : l'espace de Fock [6]. En effet, cet espace a la particularité de pouvoir décrire les états quantiques d'un système pouvant avoir un nombre variable de particules identiques à partir d'une combinaison d'espaces d'Hilbert identiques. Le chemin pris pour atteindre ce but sera plutôt non conventionnel, mais a l'avantage d'être particulièrement élégant mathématiquement.

Étant donné que l'on considérera des systèmes à plusieurs particules, il faudra tenir compte de la nature de celles-ci, c'est-à-dire des bosons ou des fermions. En effet, les bosons et les fermions se distribuent de manière différente. Les bosons sont des particules de spins entiers, indistingables et qui respectent la statistique de Bose-Einstein. Ceux-ci peuvent se trouver dans le même état quantique. Dans les bosons connus, on retrouve les photons, les gluons, le Higgs et les bosons lourds  $W^\pm, Z^0$ . Les fermions sont des particules de spins demi-entiers, indistingables et qui respectent la statistique de Fermi-Dirac. Selon le principe d'exclusion de Pauli, deux fermions identiques ne peuvent pas être dans le même état quantique. Les leptons, les quarks et les baryons sont des fermions.

Considérant ces différences fondamentales entre ces types de particule, on parlera séparément de l'espace de Fock bosonique et de l'espace de Fock fermionique en introduisant du même coup les relations de commutation des opérateurs de création et d'annihilation respectives.

#### 3.1 Rappel de certaines structures mathématiques et opérations

Tout d'abord, pour mieux voir la place de l'espace de Fock dans les espaces et structures plus connus telles que les espaces vectoriels et les espaces d'Hilbert, examinons la figure 2.

Il ne faut pas se perdre ici : la discussion sur ces structures pourrait durer très longtemps. Attardons-nous donc rapidement et hiérarchiquement à la ligne directrice schématisée en vert. On sait tout d'abord qu'un *groupe* est un doublet  $(G, \star)$ , soit un ensemble muni d'une loi de composition respectant trois propriétés (associativité, élément neutre et élément inverse). Il est abélien si sa loi de composition est commutative.

Un *anneau* est un triplet  $(A, \star_1, \star_2)$  où  $(A, \star_1)$  forme un groupe abélien,  $\star_2$  est associative, il existe un élément neutre multiplicatif et les axiomes de distributivité sont respectés.

Un *corps* est un anneau avec un inverse multiplicatif et qui possède au moins deux éléments.

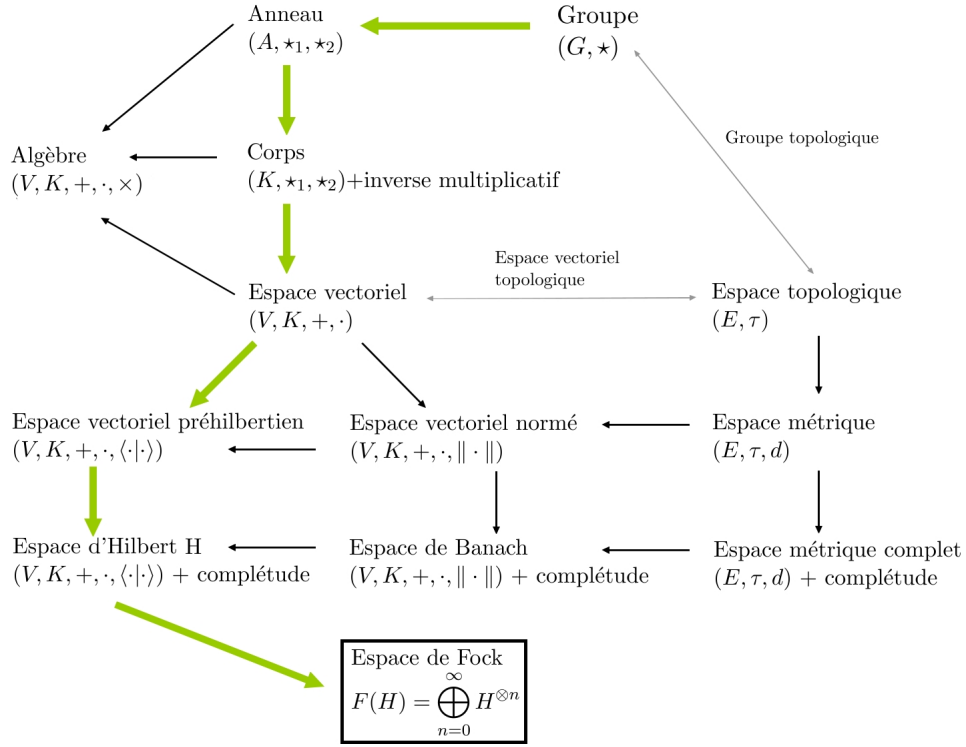


FIGURE 2 – Place de l'espace de Fock dans le réseaux des structures algébriques et hybrides. Les flèches simples  $A \rightarrow B$  signifient que  $A \subset B$  alors que les doubles flèches représentent une construction de deux sous-structures.

Un *espace vectoriel* est un quadruplet  $(V, K, +, \cdot)$ , soit un ensemble  $V$  sur un corps  $K$  (on utilise aussi beaucoup  $\mathbb{F}$ ) muni d'une loi de composition interne additive ( $V \times V \rightarrow V : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u} + \mathbf{v}$ ), une loi de composition externe multiplicative ( $K \times V \rightarrow V : (a, \mathbf{u}) \mapsto a\mathbf{u}$ ) et les 8 propriétés suivantes : commutativité de la somme, associativité de la somme, existence d'un élément neutre, existence des éléments opposés, identité multiplicative, associativité de la multiplication, distributivité scalaire, distributivité vectorielle.

À cette structure d'espace vectoriel, il est possible d'ajouter la notion de produit scalaire, c'est-à-dire une application

$$\langle | \rangle : V \times V \rightarrow K$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle$$

qui respecte les trois axiomes suivants  $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  et  $\forall a, b \in K$  :

- (1)  $\langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle \geq 0$  et  $\langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$  (positivité)
- (2)  $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle}$  (symétrie de la conjugaison)
- (3)  $\langle \mathbf{u} | a\mathbf{v} + b\mathbf{w} \rangle = a\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle + b\langle \mathbf{u} | \mathbf{w} \rangle$  (linéarité) Si  $K = \mathbb{C}$ , la conjugaison est hermitienne

et le deuxième et le troisième argument impliquent la sesquilinearité, soit  $\langle a\mathbf{u} + b\mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle = a^* \langle \mathbf{u} | \mathbf{w} \rangle + b^* \langle \mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle$ . La structure d'espace vectoriel muni d'un produit scalaire est un *espace vectoriel préhilbertien* (on dit aussi simplement espace préhilbertien). D'ailleurs, l'espace préhilbertien est aussi un espace normé, puisqu'on peut toujours définir une norme à partir du produit scalaire  $\|\mathbf{u}\|^2 = \langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle$  qui respecte l'égalité de Pythagore, l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'inégalité du triangle en raison des propriétés (1) à (3) du produit scalaire [3].

En complétant l'espace préhilbertien, on arrive à l'espace qui est probablement le plus important en physique : l'*espace d'Hilbert*. En effet, l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$  et les espaces de fonctions de carré intégrable (de Lebesgue,  $L^2$  par exemple) sont des exemples d'espaces d'Hilbert utilisés en mécanique classique et quantique. Compléter un espace préhilbertien  $P$ , cela veut dire que toute suite de Cauchy de  $P$  a une limite dans  $P$ . Autrement dit, toute suite de Cauchy de  $P$  converge [2]. Ici, pour ne pas entrer dans les détails techniques, on invite le lecteur à lire sur le sujet des suites de Cauchy pour avoir plus d'informations. En mécanique quantique, les états d'une particule appartiennent à un certain espace d'Hilbert. Puisque l'on veut étudier un système à plusieurs particules, on peut déjà imaginer que l'on aura à combiner plusieurs espaces d'Hilbert. L'essentiel est maintenant établi pour introduire l'espace de Fock.

## 3.2 Espace de Fock

Avant de définir l'espace de Fock, concentrons-nous davantage sur l'espace d'Hilbert qui sera central pour la suite des choses :  $L^2(\mathbb{R}^{4n})$  équipé du produit scalaire complexe

$$\langle \psi | \phi \rangle_n \equiv \int_{\mathbb{R}^{4n}} \psi(x_1, \dots, x_n)^\dagger \phi(x_1, \dots, x_n) d^4x_1 \dots d^4x_n$$

où  $n = 1, 2, 3, \dots$  et avec lequel on définit la norme  $\|\psi\|_n \equiv \sqrt{\langle \psi | \psi \rangle_n}$  telle que

$$\|\psi\|_n^2 = \int_{\mathbb{R}^{4n}} |\psi(x_1, \dots, x_n)|^2 d^4x_1 \dots d^4x_n$$

On travaillera donc ici dans l'espace-temps (4 dimensions) dans lequel on écrit un point de celui-ci comme  $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$  avec  $x^0 = ct$  ( $c$  est la vitesse de la lumière, que l'on prendra comme égale à 1 et  $t$  est le temps) et  $x^1, x^2, x^3$  les coordonnées spatiales. L'espace  $L^2(\mathbb{R}^{4n})$  contient toutes les fonctions

$$\psi: \mathbb{R}^{4n} \rightarrow \mathbb{C}$$

dont la norme est finie. Ceci dit, considérons deux fonctions  $\psi, \phi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}$  (donc appartenant à  $L^2(\mathbb{R}^4)$ ) afin d'introduire quelques opérations non triviales sur ces fonctions. Tout d'abord, le produit tensoriel entre les fonctions est tel que

$$(\psi \otimes \phi)(x_1, x_2) \equiv \psi(x_1)\phi(x_2)$$

ce qui fait que  $\psi \otimes \phi \in L^2(\mathbb{R}^8)$ . On voudra éventuellement traiter le cas bosonique et le cas fermionique séparément. Pour ce faire, on peut séparer l'espace d'Hilbert  $L^2$  en deux espaces d'Hilbert contenant d'une part les fonctions symétriques (bosons) et d'autre part les fonctions antisymétriques (fermions) (technique analogue à la séparation d'une matrice ou d'un tenseur en partie matrice/tenseur symétrique et antisymétrique). Par fonction symétrique (respectivement antisymétrique), on entend une fonction  $\psi = \psi(x_1, \dots, x_n)$  (avec  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^4$ ) de  $L^2(\mathbb{R}^{4n})$  symétrique (respectivement antisymétrique) par rapport à l'argument  $x_1, \dots, x_n$ . De façon plus explicite et générale, un tenseur  $T(0, m)$  est symétrique s'il est identique sous une permutation des éléments sur lesquelles il agit et est antisymétrique si la permutation change son signe :

$$\begin{aligned} T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_m) &= T(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_m) \quad (\text{symétrique}) \\ T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_m) &= -T(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_m) \quad (\text{antisymétrique}) \end{aligned}$$

Sans entrer dans les détails, on a les mêmes règles de symétrisation avec un tenseur  $(p, 0)$  prenant  $p$  covecteurs. Si on combine un tenseur d'ordre  $m$  avec un tenseur d'ordre  $n$  via le produit tensorielle, alors le tenseur résultant est d'ordre  $m + n$  que l'on peut symétriser. De façon particulière, pour les tenseurs d'ordre 1  $\psi, \phi$  qui résultent, par le produit tensoriel, en un tenseur d'ordre 2, on introduit les opérations de symétrisation  $S_+$  et d'antisymétrisation  $S_-$  :

$$\begin{aligned} S_+(\psi \otimes \phi) &\equiv \frac{1}{2}(\psi \otimes \phi + \phi \otimes \psi) \\ S_-(\psi \otimes \phi) &\equiv \frac{1}{2}(\psi \otimes \phi - \phi \otimes \psi) = \frac{1}{2}(\psi \wedge \phi) \end{aligned}$$

et on obtient la décomposition

$$\psi \otimes \phi = S_+(\psi \otimes \phi) + S_-(\psi \otimes \phi)$$

du produit tensoriel. De plus, en étant plus général ici, on écrit  $L^2_{sym}(\mathbb{R}^{4n}) \equiv S_+L^2(\mathbb{R}^{4n})$  et  $L^2_{antisym}(\mathbb{R}^{4n}) \equiv S_-L^2(\mathbb{R}^{4n})$  ce qui nous permet de faire la séparation

$$L^2(\mathbb{R}^{4n}) = L^2_{sym}(\mathbb{R}^{4n}) \oplus L^2_{antisym}(\mathbb{R}^{4n})$$

De plus, on a  $S_+(\psi \otimes \phi) \in L^2_{sym}(\mathbb{R}^8)$  et  $S_-(\psi \otimes \phi) \in L^2_{antisym}(\mathbb{R}^8)$ . Puisque le produit tensoriel de deux espaces d'Hilbert donne un autre espace d'Hilbert, on a <sup>1</sup>

$$L^2(\mathbb{R}^8) = L^2(\mathbb{R}^4) \otimes L^2(\mathbb{R}^4) = L^2(\mathbb{R}^4)^{\otimes 2}.$$

C'est la règle pour l'ajout de degrés de liberté : on prend le produit tensoriel d'espaces d'Hilbert. Également, on a introduit la notation de puissance tensorielle  $V^{\otimes n} \equiv \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_n$ .

Le produit scalaire de ce nouvel espace d'Hilbert est

$$\langle \phi_1 \otimes \phi_2 | \psi_1 \otimes \psi_2 \rangle = \langle \phi_1 | \psi_1 \rangle \langle \phi_2 | \psi_2 \rangle$$

---

1. Pour l'espace d'Hilbert antisymétrique, on peut écrire  $L^2_{antisym}(\mathbb{R}^8) = L^2(\mathbb{R}^4) \wedge L^2(\mathbb{R}^4) = L^2(\mathbb{R}^4)^{\wedge 2}$ .

Lorsque nous avons séparé l'espace d'Hilbert en sa partie symétrique et antisymétrique, l'opération  $\oplus$  a été utilisée. Celle-ci s'appelle une *somme directe*. Cette opération est le dernier élément de casse-tête pour construire l'espace de Fock. Soit deux espaces vectoriels  $U$  et  $V$  sur un corps  $K$ . On peut donner une structure d'espace vectoriel au produit cartésien  $U \times V$  en définissant ses lois de composition internes et externes composantes par composantes, c'est-à-dire telles que  $\forall u, u_1, u_2 \in U, \forall v, v_1, v_2 \in V$  et  $\forall a \in K$

$$+ : (U \times V) \times (U \times V) \rightarrow (U \times V) : ((\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1), (\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2)) \mapsto (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$$

$$\text{et } \cdot : K \times (U \times V) \rightarrow (U \times V) : (a, (\mathbf{u}, \mathbf{v})) \mapsto (a\mathbf{u}, a\mathbf{v}).$$

On peut montrer que les axiomes de l'espace vectoriel sont bel et bien respectés. L'espace vectoriel résultant s'écrit  $U \oplus V$  et on dit que c'est la somme directe entre les espaces  $U$  et  $V$ . De la même manière que pour une somme de plusieurs éléments on écrit  $\sum_i X_i$ , on note la somme directe de plusieurs éléments  $\bigoplus_{i=0} X_i$ . Étant un espace vectoriel, l'espace d'Hilbert peut ainsi être combiné par somme directe à d'autres espaces d'Hilbert pour former un autre espace d'Hilbert <sup>2</sup>[2].

Or, en regroupant toutes les dernières notions présentées, on a que l'*espace de Fock* est la somme directe de tous les états composites ou non de particules ou autrement dit, la somme directe des espaces d'Hilbert pour une particule, deux particules, trois particules, ..., soit

$$F_\nu(H) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S_\nu H^{\otimes n} = \mathbb{C} \oplus \underbrace{H}_{1 \text{ particule}} \oplus \underbrace{(S_\nu(H \otimes H))}_{2 \text{ particules}} \oplus \underbrace{(S_\nu(H \otimes H \otimes H))}_{3 \text{ particules}} \oplus \dots$$

où  $\nu = +, -$  ce qui nous donne nos opérateurs de symétrisation et d'antisymétrisation dépendant de si on a un système de bosons ou de fermions. Aussi,  $H$  est l'espace d'Hilbert pour une particule et  $\mathbb{C}$  représente les scalaires complexes, soient les états correspondant à aucune particule. Il est à noter que l'espace de Fock est lui-même un espace d'Hilbert, ce qui découle des opérations de produit tensorielle et de somme direct effectuées sur les espaces d'Hilbert à une particule qui préservent la structure de  $L^2$  comme mentionné précédemment. Malgré tout, l'utilité de l'espace de Fock ne vient pas de son identité propre, qui n'est en fin de compte qu'une autre manifestation de  $L^2$ , mais bien de sa construction en tant que somme directe infinie dénombrable, laquelle permet d'interpréter un élément de la somme comme un sous-espace avec un nombre précis de particules (ou de modes d'excitation). De plus, l'espace de Fock nous permettra de bien définir les relations de commutation et d'anticommutation des opérateurs d'annihilation et de création. Ceci dit, traitons maintenant le cas bosonique.

---

2. En fait, la démarche est similaire aux espaces vectoriels, mais une étape supplémentaire doit être effectuée afin d'assurer la complétude de l'espace d'Hilbert résultant.



### 3.2.1 Espace de Fock bosonique

Puisque les fonctions sont symétriques, on écrit

$$\begin{aligned}
 F_+(L^2) &= \bigoplus_{n=0}^{\infty} S_+ L^2(\mathbb{R}^4)^{\otimes n} \\
 &= \bigoplus_{n=0}^{\infty} L_{sym}^2(\mathbb{R}^4)^{\otimes n} \\
 &= \mathbb{C} \oplus L_{sym}^2(\mathbb{R}^4) \oplus (L_{sym}^2 \otimes L_{sym}^2) \oplus (L_{sym}^2 \otimes L_{sym}^2 \otimes L_{sym}^2) \oplus \dots
 \end{aligned}$$

avec le produit scalaire

$$\langle \psi | \phi \rangle \equiv \psi_0 \phi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \langle \psi_n | \phi_n \rangle$$

Il faut ici souligner que  $\psi_0$  est un nombre complexe arbitraire, les fonctions à une particule  $\psi_1 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}$  sont de la forme  $\psi_1 = \psi_1(x)$  et les fonctions de  $n$  particules  $\psi_n : \mathbb{R}^{4n} \rightarrow \mathbb{C}$  ( $n > 2$ ) sont de la forme  $\psi_n = \psi_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$  et sont symétriques par rapport aux permutations des éléments  $x_1, x_2, \dots, x_n$  puisque ce sont des bosons.

On se rappelle aussi que l'on a défini la somme directe en donnant une structure d'espace vectoriel au produit cartésien, qui représente l'ensemble des couples ordonnés. Ainsi, la somme directe d'espace d'Hilbert est aussi un ensemble de couples ordonnés. Puisqu'il y a une infinité d'éléments, on a des suites infinies. Autrement dit, les éléments de l'espace de Fock sont tous les tuples infinies de type

$$\psi \equiv (\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots)$$

Cette notation est très générale. Effectivement, le tuple contient tous les états possibles à plusieurs particules appartenant tous à un certain espace d'Hilbert. Lorsque l'on agira dessus, on agira sur tous les états à plusieurs particules en même temps. On a donc la liberté d'avoir un système avec des états liés à 2 particules et 4 particules par exemple, l'état de Fock associé serait donc du genre  $(0, 0, \psi_2, 0, \psi_4, \dots)$ . Cependant, en pratique, on prendra plutôt un état de Fock avec un nombre précis de particules (par exemple  $\psi = (0, \dots, \psi_n, 0, \dots)$ ) et puis on agira dessus avec un opérateur de création par exemple (on aurait alors l'état  $(0, \dots, \psi_{n+1}, 0, \dots)$ ). Bref, les états de Fock nous permettent la variation du nombre de particules<sup>3</sup> dans le système de bien des manières, ce qui n'était pas possible dans l'ancien formalisme quantique.

Nous sommes maintenant en mesure de faire les premiers pas pour construire les opérateurs d'annihilation et de création. Tout d'abord, on se rappelle que pour ajouter des degrés de liberté à un système, il faut utiliser le produit tensoriel. Or, pour chaque fonction  $\psi_n \in L^2(\mathbb{R}^{4n})$  à  $n$  particules, il est possible d'ajouter une particule en la composant d'une fonction  $\phi$  à une particule via le produit tensoriel. Dans un système de bosons, on symétrise évidemment cette opération

---

3. Ce qui sera fait par des opérateurs qui seront introduits plus loin dans cette section et aussi à la prochaine section.

de composition de fonctions et comme il est commode de faire en mécanique quantique, on normalise (en effet, on voudra que notre opérateur de création génère un état supplémentaire tel que l'état final du système est normalisé). On définit donc la fonction composée comme

$$\varrho_{n+1} \equiv \sqrt{n+1} \cdot S_+(\varphi \otimes \psi_n)$$

Pour préciser l'idée encore légèrement, la composition d'une fonction à une particule avec une fonction à  $n$  particules revient donc, physiquement, à créer une particule dans le système qui en contenait déjà  $n$ . Ainsi, il en résulte un système à  $n+1$  particules. De façon plus explicite, on a

$$\begin{aligned} \varrho_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) &= \sqrt{n+1} \cdot S_+(\varphi \otimes \psi_n)(x_1, \dots, x_{n+1}) \\ &= \frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)!} \sum_{\pi} \varphi(x_1) \psi_n(x_2, \dots, x_{n+1}) \end{aligned}$$

où, comme on s'en attend avec le produit tensoriel, l'on somme sur toutes les permutations  $\pi$  des arguments  $x_1, \dots, x_{n+1}$ . De façon particulière, on a

$$\varrho_1(x_1) = \varphi(x_1)\psi_0 \quad , \quad \varrho_2(x_1, x_2) = \frac{\varphi(x_1)\psi_1(x_2) + \varphi(x_2)\psi_1(x_1)}{\sqrt{2}}$$

Soit la fonction à une particule  $\varphi$ . L'*opérateur de création bosonique* est un opérateur linéaire que l'on définit comme

$$\begin{aligned} a^\dagger(\varphi): \quad & F_+(L^2) \rightarrow F_+(L^2) \\ & (\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots) \mapsto (0, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \dots) \\ & \mapsto (0, S_+(\varphi \otimes \psi_0), \sqrt{2}S_+(\varphi \otimes \psi_1), \sqrt{3}S_+(\varphi \otimes \psi_2), \dots) \end{aligned}$$

Pour chaque élément du tuple, on ajoute une particule via l'opérateur de création. Nécessairement, il faut faire une translation des éléments du tuple pour qu'il y ait conservation de la forme de l'état de Fock, c'est-à-dire pour que le premier élément du tuple soit un nombre complexe (ici, ce doit être 0 puisqu'il n'y a pas d'état plus rudimentaire que l'état du vide qui, lorsque l'opérateur de création lui est appliqué, devienne un état à une particule. Autrement dit, il n'y a pas de façon d'appliquer l'opérateur de création tel que l'état ait 0 particule, ce qui explique ce 0.), le deuxième soit un état à une particule, etc.

Il est d'usage de plutôt définir l'opérateur de création sur son unique application sur un état  $\psi_n$  à  $n$  bosons appartenant à l'espace d'Hilbert  $L^2_{sym}(\mathbb{R}^{4n})$ . L'ajout de la particule devient plus explicite dans l'espace qui gagne 4 degrés de liberté (une particule en 4 dimensions) et il en résulte que l'on peut écrire [8] :

$$\begin{aligned} a^\dagger(\varphi): \quad & L^2_{sym}(\mathbb{R}^4)^{\otimes n} \rightarrow L^2_{sym}(\mathbb{R}^4)^{\otimes(n+1)} \\ & \psi_n \mapsto \psi_{n+1} \end{aligned}$$

où l'on voit l'apparition dans le système d'une particule supplémentaire suite à l'application de l'opérateur.

Maintenant que l'opérateur de création est bien défini, on aimerait avoir un opérateur qui fait exactement l'action inverse, c'est-à-dire annihiler des particules. Pour ce faire, on construira l'*opérateur d'annihilation bosonique* comme l'opérateur adjoint à l'opérateur de création, c'est-à-dire un opérateur  $a(\varphi)$  tel que la relation suivante est respectée :

$$\langle \phi | a^\dagger(\varphi) \psi \rangle = \langle a(\varphi) \phi | \psi \rangle$$

Tout d'abord, considérons les états de Fock simples  $\phi = (0, 0, \dots, \phi_{n+1}, \dots, 0)$  et  $\psi = (0, 0, \dots, \psi_n, \dots, 0)$ . On peut manipuler la partie de gauche plus aisément en utilisant la définition du produit scalaire pour un seul état à  $n + 1$  particules :

$$\begin{aligned} \langle \phi | a^\dagger(\varphi) \psi \rangle &= \langle \phi_{n+1} | a^\dagger(\varphi) \psi_n \rangle \\ &= \langle \phi_{n+1} | \psi_{n+1} \rangle \\ &= \sqrt{n+1} \langle \phi_{n+1} | S_+(\varphi \otimes \psi_n) \rangle \\ &= \sqrt{n+1} \int_{\mathbb{R}^{4(n+1)}} \phi_{n+1}^\dagger(x_1, \dots, x_{n+1}) \varphi(x_{n+1}) \psi_n(x_1, \dots, x_n) d^4x_1 \dots d^4x_{n+1} \\ &= \sqrt{n+1} \int_{\mathbb{R}^{4n}} \left( \int_{\mathbb{R}^4} \phi_{n+1}^\dagger(x_1, \dots, x_{n+1}) \varphi(x_{n+1}) d^4x_{n+1} \right) \psi_n(x_1, \dots, x_n) d^4x_1 \dots d^4x_n \\ &= \sqrt{n+1} \int_{\mathbb{R}^{4n}} \left( \int_{\mathbb{R}^4} \varphi(x_{n+1})^\dagger \phi_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) d^4x_{n+1} \right)^\dagger \psi_n(x_1, \dots, x_n) d^4x_1 \dots d^4x_n \\ &= \langle a(\varphi) \phi_{n+1} | \psi_n \rangle \\ &= \langle a(\varphi) \phi | \psi \rangle \end{aligned}$$

On obtient donc

$$a(\varphi) \phi = \sqrt{n+1} \int_{\mathbb{R}^4} \varphi(x_{n+1})^\dagger \phi(x_1, \dots, x_{n+1}) d^4x_{n+1}.$$

On peut étendre cette définition pour un état de Fock quelconque  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots)$ . De ceci, définissons tout d'abord

$$\chi_n(x_1, \dots, x_n) \equiv \sqrt{n+1} \int_{\mathbb{R}^4} \varphi(x_{n+1})^\dagger \psi(x_1, \dots, x_{n+1}) d^4x_{n+1}.$$

Intuitivement, il semble étrange que l'on ait une intégrale pour retirer une particule du système. Cependant, ce n'est pas sorcier, l'intégrale est définie par rapport à l'endroit où se trouve la particule de fonction d'onde  $\varphi$ . Il en résulte donc un scalaire à cette position ! La particule n'est plus. Cela étant dit, on obtient finalement que l'opérateur d'annihilation bosonique est un opérateur linéaire tel que

$$\begin{aligned} a(\varphi): \quad & F_+(L^2) \rightarrow F_+(L^2) \\ & (\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots) \mapsto (\chi_0, \chi_1, \chi_2, \dots) \end{aligned}$$

avec  $(\chi_0, \chi_1, \dots) = \left( \int_{\mathbb{R}^4} \varphi(x_1)^\dagger \psi(x_1) d^4x_1, \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}^4} \varphi(x_2)^\dagger \psi(x_1, x_2) d^4x_{n+1}, \dots \right)$ . Ici, on remarque que les éléments de l'état de Fock ont subi une translation vers la gauche. En effet,  $a(\varphi) \psi_1 = \chi_0$

est un nombre complexe puisqu'il n'y a pas de particule,  $a(\varphi)\psi_2 = \chi_1$  un état à une particule, etc. Également, on peut définir l'opérateur pour un seul état à plusieurs particules  $\psi_n$  comme [8]

$$a(\varphi): L_{sym}^2(\mathbb{R}^4)^{\otimes n} \rightarrow L_{sym}^2(\mathbb{R}^4)^{\otimes(n-1)}$$

$$\psi_n \mapsto \psi_{n-1}$$

où l'on voit la disparition d'une particule dans le système suite à l'application de l'opérateur d'annihilation.

Sachant comment sont définis les opérateurs d'annihilation, il est maintenant possible de trouver leurs relations de commutation. Comme la démarche est assez pédestre pour trouver ces relations, nous nous contenterons de les exposer. Il est important, toutefois, de rappeler que le commutateur est une opération telle que pour deux opérateurs  $A$  et  $B$ , on a  $[A, B] = AB - BA$ . Dans le cas bosonique, on parle de commutation des opérateurs étant donné que nous avons des fonctions symétriques. Cela s'imagine bien ainsi : si les opérateurs commutent, c'est-à-dire  $[A, B] = 0$ , alors  $AB = BA$ , ce qui illustre bien la symétrie sous la permutation des opérateurs. Ainsi, on trouve que pour deux fonctions  $f, g \in L_{sym}^2(\mathbb{R}^4)$  et une fonction  $\psi \in F_+(L^2)$  on a

$$\begin{aligned} [a^\dagger(f), a^\dagger(g)] \psi &= 0 \\ [a(f), a(g)] \psi &= 0 \\ [a(f), a^\dagger(g)] \psi &= \langle f | g \rangle_1 \psi \end{aligned}$$

Ces relations pour les opérateurs de création et d'annihilation sont générales et rigoureuses, mais ce ne sont pas du tout les plus pratiques en physique : on aimerait avoir des relations plus concrètes. En quelques étapes, on pourra retrouver des relations plus familières et par le fait même, on pourra faire la connection avec le chapitre 2. Tout d'abord, on peut construire un état de Fock bosonique à partir des opérateurs de création appliqués sur l'état du vide  $|0\rangle$  :

$$\psi = a^\dagger(\varphi_1)a^\dagger(\varphi_2)\dots a^\dagger(\varphi_s) |0\rangle$$

où les  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_s \in L_{sym}^2(\mathbb{R}^4)$  sont des états normalisés à un boson. Ainsi, l'état de Fock  $\psi$  contient  $s$  bosons créés avec  $s$  opérateurs de création. De façon particulière, on observe que

$$a^\dagger(\varphi_j) |0\rangle = (0, \varphi_j, 0, \dots)$$

$$a^\dagger(\varphi_j)a^\dagger(\varphi_k) |0\rangle = (0, 0, \sqrt{2}S_+(\varphi_j \otimes \varphi_k), \dots)$$

Considérons maintenant un système de fonctions  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$  telles que  $\varphi_i : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}$  et qui forment une base orthonormée de l'espace d'Hilbert  $L_{sym}^2(\mathbb{R}^4)$ , c'est-à-dire que  $\langle \varphi_i | \varphi_j \rangle = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, 2, 3, \dots$ . On peut alors définir

$$a_i^\dagger \equiv a^\dagger(\varphi_i) \quad \text{et} \quad a_i \equiv a(\varphi_i)$$

avec  $j = 1, 2, 3, \dots$ . Avec  $j, k = 1, 2, 3, \dots$ , on peut finalement écrire les relations de commutation comme

$$\begin{aligned} [a_j^\dagger, a_k^\dagger] \psi &= 0 \\ [a_j, a_k] \psi &= 0 \\ [a_j, a_k^\dagger] \psi &= \delta_{jk} \psi \end{aligned}$$

où l'on remarque que la dernière relation de commutation est celle qui a été utilisée au chapitre 2 avec  $j = k$  [14]. Si  $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_i$  et  $k_1, \dots, k_i = 1, 2, \dots$ , on obtient aussi de façon plus générale

$$\psi = (0, \dots, \psi_{k_1+\dots+k_i}, 0, \dots) = \frac{(\hat{a}_{j_1}^\dagger)^{k_1}}{\sqrt{k_1!}} \frac{(\hat{a}_{j_2}^\dagger)^{k_2}}{\sqrt{k_2!}} \dots \frac{(\hat{a}_{j_i}^\dagger)^{k_i}}{\sqrt{k_i!}} |0\rangle.$$

que l'on peut écrire de façon plus compacte avec la notation du nombre d'occupation comme

$$|k_1, k_2, \dots, k_i\rangle = \prod_{m=1}^i \frac{(\hat{a}_{j_m}^\dagger)^{k_m}}{\sqrt{k_m!}} |0\rangle$$

ce qui est tout à fait analogue au résultat obtenu au chapitre 2, cependant, cette fois-ci, on peut ajouter que l'on a un état normalisé de l'espace de Fock bosonique dans lequel on peut créer un nombre arbitraire  $k_m$  de bosons dans un même état quantique en raison de l'aspect symétrique de leur fonction d'onde. Bref, on retombe sur nos pattes : on ne perd pas nos intuitions acquises avec l'oscillateur harmonique et on gagne au passage une bien meilleure vision mathématique et de la généralité. Il reste maintenant à aborder le cas fermionique.

### 3.2.2 Espace de Fock fermionique

La façon d'obtenir les résultats pour l'espace de Fock fermionique est totalement analogue au cas bosonique. Nous serons donc beaucoup plus concis dans cette sous-section pour éviter la redondance.

$$\begin{aligned} F_-(L^2) &= \bigoplus_{n=0}^{\infty} S_- L^2(\mathbb{R}^4)^{\otimes n} \\ &= \bigoplus_{n=0}^{\infty} L_{antisym}^2(\mathbb{R}^4)^{\otimes n} \\ &= \mathbb{C} \oplus L_{antisym}^2(\mathbb{R}^4) \oplus (L_{antisym}^2 \otimes L_{antisym}^2) \oplus (L_{antisym}^2 \otimes L_{antisym}^2 \otimes L_{antisym}^2) \oplus \dots \end{aligned}$$

avec le produit scalaire

$$\langle \psi | \phi \rangle \equiv \psi_0 \phi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \langle \psi_n | \phi_n \rangle$$

On a que  $\psi_0$  est un nombre complexe arbitraire, les fonctions à une particule  $\psi_1 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}$  sont de la forme  $\psi_1 = \psi_1(x)$  et les fonctions de  $n$  particules  $\psi_n : \mathbb{R}^{4n} \rightarrow \mathbb{C}$  ( $n > 2$ ) sont de la forme  $\psi_n =$

$\psi_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$  et sont antisymétriques par rapport aux permutations des éléments  $x_1, x_2, \dots, x_n$  puisque ce sont des fermions. Les états de Fock sont tous les tuples infinis  $\psi \equiv (\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots)$ . Dans un système de fermions, on antisymétrise la composition de fonctions de sorte que l'on peut définir

$$\varrho_{n+1} \equiv \sqrt{n+1} \cdot S_-(\varphi \otimes \psi_n)$$

Cette fois-ci, on a

$$\begin{aligned} \varrho_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) &= \sqrt{n+1} \cdot S_-(\varphi \otimes \psi_n)(x_1, \dots, x_{n+1}) \\ &= \frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)!} \sum_{\pi} \text{sgn}\pi \varphi(x_1) \psi_n(x_2, \dots, x_{n+1}) \end{aligned}$$

où  $\text{sgn}\pi$  est 1 pour un nombre de permutations pair des arguments  $x_1, \dots, x_{n+1}$  et  $-1$  pour un nombre impair de permutation. Concrètement,

$$\varrho_1(x_1) = \varphi(x_1)\psi_0 \quad , \quad \varrho_2(x_1, x_2) = \frac{\varphi(x_1)\psi_1(x_2) - \varphi(x_2)\psi_1(x_1)}{\sqrt{2}}.$$

Ainsi, pour une fonction à une particule  $\varphi$ , on peut définir l'*opérateur de création fermionique* comme un opérateur linéaire tel que

$$\begin{aligned} b^\dagger(\varphi): \quad & F_-(L^2) \rightarrow F_-(L^2) \\ & (\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots) \mapsto (0, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \dots) \\ & \mapsto (0, S_-(\varphi \otimes \psi_0), \sqrt{2}S_-(\varphi \otimes \psi_1), \sqrt{3}S_-(\varphi \otimes \psi_2), \dots) \end{aligned}$$

La définition plus particulière et intuitive est telle que [8]

$$\begin{aligned} b^\dagger(\varphi): \quad & L_{\text{antisym}}^2(\mathbb{R}^4)^{\otimes n} \rightarrow L_{\text{antisym}}^2(\mathbb{R}^4)^{\otimes(n+1)} \\ & \psi_n \mapsto \psi_{n+1} \end{aligned}$$

Pour annihiler des fermions, on construit l'*opérateur d'annihilation fermionique* comme l'opérateur adjoint à l'opérateur de création, c'est-à-dire un opérateur  $b(\varphi)$  tel que la relation suivante est respectée :

$$\langle \phi | b^\dagger(\varphi)\psi \rangle = \langle b(\varphi)\phi | \psi \rangle$$

On obtient donc

$$b(\varphi)\phi = \sqrt{n+1} \int_{\mathbb{R}^4} \varphi(x_{n+1})^\dagger \phi(x_1, \dots, x_{n+1}) d^4x_{n+1}.$$

et on peut étendre cette définition pour un état de Fock quelconque  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots)$ . Avec

$$\chi_n(x_1, \dots, x_n) \equiv \sqrt{n+1} \int_{\mathbb{R}^4} \varphi(x_{n+1})^\dagger \psi(x_1, \dots, x_{n+1}) d^4x_{n+1}.$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} b(\varphi): \quad & F_-(L^2) \rightarrow F_-(L^2) \\ & (\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots) \mapsto (\chi_0, \chi_1, \chi_2, \dots) \end{aligned}$$

et appliqué uniquement sur  $\psi_n$ , on a [8]

$$b(\varphi): L_{antisym}^2(\mathbb{R}^4)^{\otimes n} \rightarrow L_{antisym}^2(\mathbb{R}^4)^{\otimes(n-1)}$$

$$\psi_n \mapsto \psi_{n-1}$$

Il est maintenant possible de trouver leurs relations d'anticommutation (les fonctions sont antisymétriques!). On définit l'anticommutateur  $\{\cdot, \cdot\}$  comme une opération qui prend deux opérateurs  $A$  et  $B$  et qui donne  $\{A, B\} = AB + BA$ . On obtient donc que si  $\{A, B\} = 0$ , alors  $AB = -BA$  ce qui illustre bien l'antisymétrie sous la permutation des opérateurs. Ainsi, on trouve que pour deux fonctions  $f, g \in L_{antisym}^2(\mathbb{R}^4)$  et une fonction  $\psi \in F_-(L^2)$  on a

$$\{b^\dagger(f), b^\dagger(g)\}\psi = 0$$

$$\{b(f), b(g)\}\psi = 0$$

$$\{b(f), b^\dagger(g)\}\psi = \langle f|g \rangle_1 \psi$$

Trouvons maintenant les relations plus familières comme pour le cas bosonique. Tout d'abord, on peut construire un état de Fock fermionique par l'application d'opérateurs de création fermionique sur l'état du vide :

$$\psi = b^\dagger(\varphi_1)b^\dagger(\varphi_2)\dots b^\dagger(\varphi_s)|0\rangle$$

où les  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_s \in L_{antisym}^2(\mathbb{R}^4)$  sont des états normalisés à un fermion. Ainsi, l'état de Fock  $\psi$  contient  $s$  fermions créés avec  $s$  opérateurs de création. De façon particulière, on observe que

$$b^\dagger(\varphi_j)|0\rangle = (0, \varphi_j, 0, \dots)$$

$$b^\dagger(\varphi_j)b^\dagger(\varphi_k)|0\rangle = (0, \frac{\varphi_j(x_1)\varphi_k(x_2) - \varphi_k(x_2)\varphi_j(x_1)}{\sqrt{2}}, 0, \dots)$$

Or, on remarque que si deux fonctions  $\varphi_j$  et  $\varphi_k$  sont égales, alors

$$b^\dagger(\varphi_1)b^\dagger(\varphi_2)\dots b^\dagger(\varphi_s)|0\rangle = 0$$

On voit donc apparaître le *principe d'exclusion de Pauli* : deux fermions ne peuvent pas se trouver dans le même état quantique. On verra que cela a une influence majeure sur la façon de construire un état de Fock fermionique. Cela étant dit, considérons un système de fonctions  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$  tel que  $\varphi_i: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}$  et qui forment une base orthonormée de l'espace d'Hilbert  $L_{antisym}^2(\mathbb{R}^4)$ , c'est-à-dire que  $\langle \varphi_i | \varphi_j \rangle = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, 2, 3, \dots$ . On définit

$$b_i^\dagger \equiv b^\dagger(\varphi_i) \quad \text{et} \quad b_i \equiv b(\varphi_i)$$

avec  $j = 1, 2, 3, \dots$ . Avec  $j, k = 1, 2, 3, \dots$ , on peut finalement écrire les relations d'anticommutation comme

$$\{b_j^\dagger, b_k^\dagger\}\psi = 0$$

$$\{b_j, b_k\}\psi = 0$$

$$\{b_j, b_k^\dagger\}\psi = \delta_{jk}\psi$$

Plus généralement, si  $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_i$ , on obtient l'état normalisé de l'espace de Fock fermionique [14]

$$\psi = (0, \dots, \psi_{1+\dots+1}, 0, \dots) = (0, \dots, \psi_i, 0, \dots) = b_{j_1}^\dagger b_{j_2}^\dagger \dots b_{j_i}^\dagger |0\rangle.$$

que l'on peut écrire de façon plus compacte avec la notation du nombre d'occupation comme

$$|\dots, 1, \dots\rangle = \prod_{m=1}^i b_{j_m}^\dagger |0\rangle$$

où la position du ou des 1 dans la représentation du nombre d'occupation dépend de quelle(s) fonction(s)  $\varphi_{j_m}$  ont été appliqué sur l'état du vide. Nul besoin de s'étendre longtemps sur ce résultat, c'est une autre manifestation explicite du principe d'exclusion de Pauli : on ne peut ajouter que des fermions de différents états quantiques dans l'état du vide. Par exemple, si on veut créer les fermions de fonctions d'onde  $\varphi_2, \varphi_3$  et  $\varphi_5$ , on écrit

$$|0, 1, 1, 0, 1\rangle = b_{j_2}^\dagger b_{j_3}^\dagger b_{j_5}^\dagger |0\rangle$$

Nous sommes maintenant d'heureux détenteurs des opérateurs de création et d'annihilation bosonique et fermionique. Tout cela est bien beau, mais il est temps d'avoir une discussion plus physique.

### 3.3 Seconde quantification (Xavier Roy-Pomerleau)

Au terme de toutes ces sections, nous sommes maintenant en mesure d'attaquer un élément important qui revient sans cesse en théorie quantique des champs, c'est-à-dire la seconde quantification. À première vue, il peut être tentant d'utiliser le raccourci trop facile de penser qu'il s'agit de quantifier deux fois quelque chose ! Or, il ne faut pas se méprendre, car nous sommes plutôt loin de cette réalité [13]. Afin d'avoir une vue d'ensemble de ce concept, analysons d'abord la *première quantification*. De façon intuitive, plusieurs textes considèrent simplement que la première quantification correspond à trouver la fonction d'onde d'une particule [6] [4]. Ainsi, en solutionnant l'équation de Schrödinger pour une situation donnée, nous effectuons la première quantification [6] [4]. Autrement dit, la matière vue dans les cours pré-gradués de mécanique quantique correspond à la vision de la première quantification. Toutefois, ce formalisme n'est pas très pratique lorsque nous tentons d'analyser des situations à plusieurs particules ! En effet, comme nous l'avons vu dans la dernière section, il est beaucoup plus avantageux de travailler avec les opérateurs de création et d'annihilation dans l'espace de Fock.

À cet égard, nous avons donc nécessairement besoin de nouvelles techniques pour résoudre les problèmes et, grosso modo, cela se traduit par la seconde quantification. Dans un premier temps, considérant que les particules, que ce soient des bosons ou des fermions, sont indiscernables, il n'est pas pertinent d'utiliser une fonction d'onde indiquant que la particule 1 se trouve à tel endroit tandis que la seconde se trouve à un autre. En effet, ces dernières considérations



ne sont pas *physiques*, ou pertinentes, en raison de l'indiscernabilité des particules [4]. À cet égard, on préférera alors la fameuse notation en nombre d'occupation, qui prend seulement en compte le nombre total de particules dans un état sans pourtant les différencier inutilement. Afin d'avoir une intuition de la seconde quantification, nous pouvons utiliser une approche un peu naïve. En effet, au terme de notre développement de l'oscillateur harmonique, nous avons obtenu l'hamiltonien en fonction des opérateurs de création et d'annihilation. L'état résultant, lorsque nous avons un nombre  $N$  d'oscillateurs harmoniques non couplés pouvait d'ailleurs s'écrire à l'aide du nombre d'occupation. Rappelons ces deux résultats ici :

$$\hat{H} = \sum_n \hbar\omega_n \left[ \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n + \frac{1}{2} \right], \quad (3.1)$$

et

$$|k_1, k_2, \dots, k_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{k_1! k_2! \dots k_N!}} (\hat{a}_1^\dagger)^{k_1} (\hat{a}_2^\dagger)^{k_2} \dots (\hat{a}_N^\dagger)^{k_N} |0, 0, \dots, 0\rangle. \quad (3.2)$$

Le fait d'avoir décrit ces situations en fonction d'opérateurs d'annihilation et de création correspond à une seconde quantification [6]. Or, la seconde quantification prend un sens encore plus fort lorsque nous introduisons les champs quantiques et des situations à plusieurs particules utilisant nécessairement l'espace de Fock. Dans les faits, nous avons donc effectué une seconde quantification dans la section précédente en obtenant les opérateurs de création et d'annihilation ainsi que leurs relations de commutation. Tous ces objets nous permettent alors d'écrire nos opérateurs, comme l'hamiltonien, à l'aide des opérateurs de création et d'annihilation. Nous allons d'ailleurs voir un exemple un peu plus détaillé dans les prochaines pages.

## 4 Notions élémentaires de théorie quantique des champs

Maintenant que nous avons les bases mathématiques et intuitives pour les opérateurs de création et d'annihilation en théorie quantique des champs, on voudrait mettre en évidence leur importance dans un cadre plus général de la théorie. En effet, nous n'avons pas encore élaboré l'idée de champ et nous n'avons pas encore donné d'applications propres à la théorie en prenant pour appui les sections précédentes. Tout ceci pourrait faire l'objet d'un très grand travail et donc ces objectifs seront répondus plutôt rapidement. Commençons donc cette escapade en abordant le sujet de la théorie classique des champs.

### 4.1 Théorie classique des champs (Vincent Thibeault)

Un champ est une quantité définie à chaque point de l'espace-temps  $(\mathbf{x}, t)$ <sup>4</sup>. Autrement dit, c'est une application qui prend un point de l'espace-temps et qui retourne un objet mathématique. Si cet objet est un scalaire, alors on a un champ scalaire, s'il est un vecteur, alors on a un champ

---

4. Évidemment, ce pourrait être d'autres espace que l'espace-temps, mais c'est celui qui nous intéresse ici.

vectorel et s'il est un tenseur, alors on a un champ tensoriel. Il ne faut donc pas s'éloigner trop loin des notions élémentaires en mathématiques pour comprendre ce qu'est un champ. Plutôt que de s'intéresser à la mécanique classique des particules dont la dynamique est décrite par des coordonnées généralisées  $q_a(t)$ , indexées par  $a$ , on s'intéressera plutôt à la dynamiques des champs  $\phi(\mathbf{x}, t)$  [13]. On a donc une infinité de degrés de liberté (au moins 1 pour chaque point  $\mathbf{x}$  de l'espace) et on parlera de systèmes continus. En effet, un champ est comme une infinité d'oscillateurs harmoniques, cela se verra plus explicitement sous peu. Pour l'instant, au chapitre 1, nous avons souligné un problème majeur de la mécanique quantique à une particule que l'on peut énoncer ainsi : la théorie est non locale ce qui résulte en une violation de causalité [6]. Avec les champs, nous n'aurons pas *vraiment*<sup>5</sup> ce problème : ce sont des objets définis localement dans l'espace-temps. On dit « local » dans le sens que le champ n'est pas défini ailleurs dans cet espace. On reviendra brièvement sur le principe de localité. Un exemple de champ est le champ électromagnétique décrit par les champs  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  et  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ . Bien que, de façon commune, on élabore l'électromagnétisme selon ces deux champs (représentés par des trivecteurs) via les équations de Maxwell, il est plus sophistiqué d'utiliser la formulation covariante des équations de Maxwell qui s'expriment selon le champ à 4 composantes  $\mathcal{A}^\mu = (\phi, \mathbf{A})$  (alias un quadrivecteur contenant un potentiel scalaire et le potentiel vecteur) [13] [10]. De cette manière, on voit bien que le concept de position ( $q_a(t)$ ) a été relégué au titre de simple argument ou autrement dit, d'étiquette pour le champ.

Pour décrire la dynamique d'une particule, on exprime le lagrangien par rapport aux variables  $q_a$  et  $\dot{q}_a$ . De la même manière, pour un champ, on exprime le lagrangien comme

$$L(t) = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) d^3x$$

où  $\mathcal{L}$  est appelé la densité lagrangienne (malgré tout, on l'appelle souvent simplement le lagrangien) qui elle est exprimée selon  $\phi$  et  $\partial_\mu \phi$ . Sachant que l'action est donnée par l'intégrale du lagrangien  $L(t)$ , on obtient

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int \mathcal{L} d^3x = \int \mathcal{L} d^4x$$

De plus, en partant du principe de moindre action ( $\delta S = 0$ ), on arrive aux équations du mouvement d'Euler-Lagrange pour les champs  $\phi$ .

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

---

5. On pourrait faire le même travail qu'au chapitre 1 pour le champ de Klein-Gordon dans l'espace-temps et on se rendrait compte que la probabilité qu'il y ait propagation en dehors du cône de lumière est non nulle ! Cependant, il faut faire attention ici : pour vraiment parler de causalité, il ne faut pas explorer si les particules peuvent se propager en dehors du cône de lumière, il faut se demander si la *mesure* effectuée à un endroit dans l'espace-temps peut affecter un autre point de l'espace dont la séparation avec le premier est de type espace. Or, il se trouve qu'aucune mesure peut affecter une autre mesure à l'extérieur du cône de lumière dans la théorie des champs de Klein-Gordon [11].

Ici, il faut souligner que le lagrangien est local, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de terme couplant directement les champs  $\phi(\mathbf{x}, t)$  et  $\phi(\mathbf{y}, t)$  pour  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$  (exemple :  $L = \int \phi(\mathbf{x})\phi(\mathbf{y})d^3x d^3y$ ). Le principe de localité est l'une des raisons principales d'introduire la théorie des champs en physique classique [13]. Ceci dit, bien que le formalisme lagrangien soit d'une grande utilité en théorie quantique des champs, ce ne sera pas dans celui-ci que l'on travaillera pour la suite des choses. En effet, le formalisme lagrangien est utilisé via les méthodes de l'intégrale de chemin qui ne seront pas discutées ici. Nous porterons donc notre attention sur le formalisme hamiltonien qui nous permettra de faire la quantification canonique. Avant d'en dire plus sur le sujet, introduisons le formalisme en question classiquement. Commençons par définir la densité d'impulsion (moment conjugué de  $\phi$ ), soit

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}.$$

Cette quantité émerge de l'équation suivante

$$p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \int \pi(x) d^3x$$

à laquelle on peut encore trouver son équivalent pour les systèmes discrets, soit l'impulsion canonique  $p^a \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}$ . Ensuite, il est essentiel de se rappeler que l'on peut exprimer, de façon classique, l'hamiltonien selon le lagrangien :

$$H = p^a(x)q_a(x) - L$$

où l'on a utilisé la convention de sommation d'Einstein. De façon analogue, la densité hamiltonienne s'écrit

$$\mathcal{H} = \pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{L}$$

et l'hamiltonien est donc

$$H = \int \mathcal{H} d^3x = \int (\pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{L}) d^3x$$

ce qui nous permet d'obtenir les équations du mouvement dans le formalisme hamiltonien, soit

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial \pi(\mathbf{x}, t)}$$

$$\dot{\pi}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial H}{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}$$

Les variables canoniques sont donc plutôt  $\phi(\mathbf{x}, t)$  et  $\pi(\mathbf{x}, t)$ , ce qui explique pourquoi on dira que la quantification est canonique. Tout est en place pour passer enfin au vif du sujet : la théorie quantique des champs.

## 4.2 Théorie quantique des champs et quantification canonique (Vincent Thi-beault)

En mécanique quantique, la quantification canonique est une méthode permettant de passer de la mécanique classique hamiltonienne à la théorie quantique. En effet, on promeut les coordonnées généralisées  $q_a$  et leur moment conjugué  $p^a$  au rang d'opérateur et on en retire les relations de commutation suivantes<sup>6</sup> (avec  $\hbar = 1$ ) :

$$[\hat{q}_a, \hat{q}_b] = [\hat{p}^a, \hat{p}^b] = 0 \quad \text{et} \quad [\hat{q}_a, \hat{p}^b] = i\delta_a^b$$

Ce qui est merveilleux dans tout ceci, c'est qu'on peut procéder exactement de la même manière pour les champs classiques  $\phi(\mathbf{x})$  et  $\pi(\mathbf{x})$  pour les rendre quantiques. Effectivement, on promeut ces champs<sup>7</sup> au rang d'opérateur. Ainsi, les *champs quantiques* sont des opérateurs de l'espace obéissant aux relations de commutation (ou d'anticommutation)<sup>8</sup> suivantes :

$$[\hat{\phi}_a(\mathbf{x}), \hat{\phi}_b(\mathbf{y})] = [\hat{\pi}^a(\mathbf{x}), \hat{\pi}^b(\mathbf{y})] = 0 \quad \text{et} \quad [\hat{\phi}_a(\mathbf{x}), \hat{\pi}^b(\mathbf{y})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta_a^b$$

où  $\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  est le delta de Dirac. Il est important de remarquer que l'on a abandonné la dépendance temporelle des champs. Cela se justifie par le fait que nous travaillons dans la représentation de Schrödinger, c'est-à-dire une représentation dans laquelle les états  $|\psi\rangle$  évoluent selon l'équation de Schrödinger  $i\frac{d}{dt}|\psi\rangle = H|\psi\rangle$ [13].

Comme la théorie porte sur ces champs quantiques, élaborons un peu cette idée, car la notion de champ quantique est loin d'être une notion évidente au premier abord. Intuitivement, d'une part, on se rappelle qu'un champ scalaire classique est simplement une fonction qui prend les coordonnées de l'espace et qui retourne une valeur scalaire, une amplitude. D'autre part on vient d'introduire un champ quantique qui est une fonction qui associe à chaque endroit dans l'espace un opérateur. Mathématiquement, si on est dans l'espace-temps  $\mathbb{R}^4$ , on écrit respectivement

$$\begin{array}{ccc} \phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R} & \text{vs} & \hat{\phi} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathcal{O} \\ \mathbf{x} \rightarrow \phi(\mathbf{x}) & & \mathbf{x} \rightarrow \hat{\phi}(\mathbf{x}) \end{array}$$

où on a noté l'ensemble des opérateurs (champs) comme  $\mathcal{O}$ . Pour le montrer encore autrement, à la figure 3, nous avons mis en évidence la différence entre un champ scalaire classique et quantique par un exemple en deux dimension de l'espace. Notre intuition de champ doit donc être changée pour être adaptée à la théorie quantique.

Maintenant que nous avons une meilleur idée de ce qu'est un champ quantique, il est maintenant intéressant d'explicitier comment ils opèrent et sur quoi. Les champs quantiques opèrent localement sur l'espace qui peut contenir un système de particules dont l'état est décrit par un état de

6. Classiquement, ces relations sont données par les crochets de Poisson

7. ...qui sont des applications, on ne l'oublie pas...

8. En effet, cela dépend encore une fois de la nature des particules dans le système traité. Pour des bosons, il y aurait commutation et pour les fermions, anticommutation.

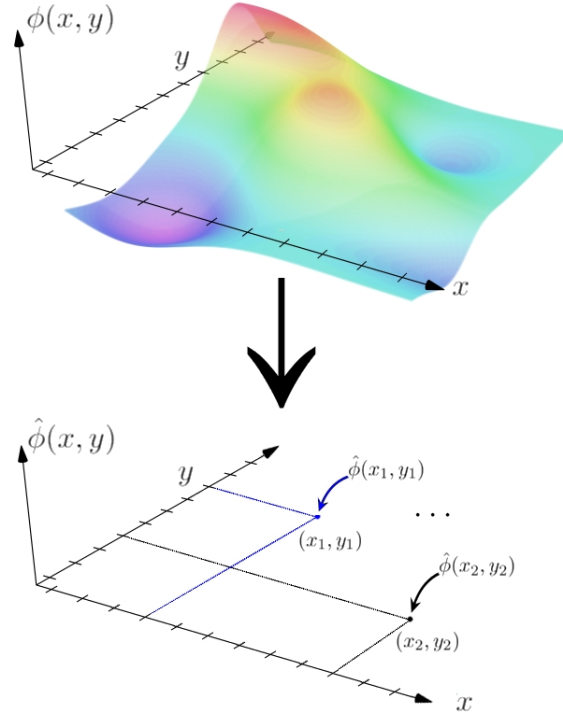


FIGURE 3 – Comparaison intuitive d'un champ classique scalaire versus un champ quantique.

Fock. Par conséquent, un champ agit sur un état de Fock et en donne un autre. Explicitement :

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(\mathbf{x}) : F_{\nu}(L^2(\mathbb{R}^{4n})) &\rightarrow F_{\nu}(L^2(\mathbb{R}^{4n})) \\ \Psi &\rightarrow \hat{\phi}(\mathbf{x})\Psi \equiv \Upsilon \end{aligned}$$

où  $\Psi$  est un état de Fock quelconque et  $\Upsilon$  est l'état de Fock résultant de l'opération du champ  $\hat{\phi}(\mathbf{x})$ . Ainsi, on remarque, en se rappelant du chapitre sur l'espace de Fock, que les opérateurs de création et d'annihilation sont des champs quantiques ! La prochaine section en dira encore d'avantage sur ceux-ci.

L'information typique que l'on veut obtenir en théorie des champs quantiques est le spectre de l'hamiltonien. D'ailleurs, il est important de noter qu'en quantifiant les champs, nous avons promu, du même coup, les fonctions des champs, comme par exemple le lagrangien et l'hamiltonien, au rang d'opérateur. Il en résulte que pour l'hamiltonien, on pourra trouver l'énergie tout comme dans le cas de l'oscillateur harmonique. Cependant, cette tâche s'avère en général très difficile puisque l'on a une infinité de degrés de liberté. C'est pourquoi on abordera seulement la théorie des champs libres (sans interaction) dans laquelle il est possible d'écrire la dynamique telle que chaque degré de liberté évolue indépendamment des autres [13]. De plus, bien que la théorie puisse inclure la relativité restreinte, cela ne sera pas traité dans l'ouvrage. Finalement,

la technique élaborée pour la quantification ne sera pas fonctionnelle pour toutes les théories des champs, mais demeure tout de même très puissante. Sans plus tarder, élaborons cette technique de quantification des champs. La *quantification canonique* s'effectue sommairement en 5 étapes qui vont comme suit :

*Étape 1* : On écrit la densité lagrangienne classique en fonction des champs. Cette partie est plus créative étant donné qu'il y a plusieurs possibilités de lagrangien. Dans le présent ouvrage, nous nous contenterons d'utiliser les lagrangiens déjà bien connus.

*Étape 2* : On calcule la densité d'impulsion et on trouve la densité hamiltonienne en fonction des champs.

*Étape 3* : On traite les champs et la densité d'impulsion comme des opérateurs et on impose les relations de commutation.

*Étape 4* : On développe les champs selon les opérateurs de création et d'annihilation. On pourra donc utiliser la représentation du nombre d'occupation introduite précédemment.

*Étape 5* : Dans plusieurs cas en théorie quantique des champs, on obtient des divergences, comme par exemple lorsque l'on veut effectuer l'intégrale pour l'hamiltonien d'un champ scalaire libre. On peut donc, le cas échéant, utiliser la méthode de l'ordre normal pour remédier à la situation.

Une fois cela fait, on détient enfin entre nos mains une théorie quantique des champs [6]!. Clarifions et élaborons davantage cette méthode par un exemple simple relié à l'oscillateur harmonique. Ceci fait l'objet de la section suivante.

### 4.3 Application de la théorie quantique des champs (Xavier Roy-Pomerleau)

Partons d'un exemple « simple » pour illustrer la méthode. Écrivons alors la densité lagrangienne d'un champ scalaire massif comme ceci :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[\partial_\mu\Phi(x)]^2 - \frac{1}{2}m^2[\Phi(x)]^2. \quad (4.1)$$

Nous devons alors trouver la densité d'impulsion donnée par :

$$\Pi^\mu(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi(x))}, \quad (4.2)$$

de sorte que nous obtenons en dérivant :

$$\Pi^\mu(x) = \partial^\mu\Phi(x), \quad (4.3)$$

dont la première composante est  $\Pi^0(x) = \pi(x) = \partial^0\Phi(x)$ . De cette manière, il est possible de trouver la densité hamiltonienne que l'on peut écrire comme :

$$\mathcal{H} = \Pi^0(x)\partial_0\Phi(x) - \mathcal{L}$$

$$= \frac{1}{2}[\partial_0\Phi(x)]^2 + \frac{1}{2}[\nabla\Phi(x)]^2 + \frac{1}{2}m^2[\Phi(x)]^2. \quad (4.4)$$

À cette étape, il est nécessaire de considérer nos champs  $\Phi(x)$  et  $\Pi^0(x)$  comme des opérateurs. Ils deviennent alors des objets qui prennent un point dans l'espace-temps et qui retournent un opérateur à cet endroit comme nous l'avons répété maintes fois à la section précédente[6]. Par analogie avec ce que nous avons dans la section de l'oscillateur harmonique, nous allons coiffer nos variables d'un chapeau pour dénoter leur nature d'opérateur. À ces derniers nous attribuons aussi les relations de commutation suivantes :

$$[\hat{\Phi}(x), \hat{\Phi}(y)] = [\hat{\Pi}^0(x), \hat{\Pi}^0(y)] = 0, \quad (4.5)$$

et

$$[\hat{\Phi}(t, \vec{x}), \hat{\Pi}^0(t, \vec{y})] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \quad (4.6)$$

De cette manière, si nous exprimons la densité hamiltonienne en fonctions de ces opérateurs, elle devient aussi un opérateur [13]. Afin de poursuivre, nous devons exprimer les champs en fonction des opérateurs de création et d'annihilation, à l'image de ce que nous avons fait à plusieurs reprises dans la section de l'oscillateur harmonique, c'est-à-dire aux équations 2.10, 2.12, 2.45 et 2.46. Pour le problème auquel nous nous intéressons, nous avons alors [6] :

$$\Phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left[ a_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right], \quad (4.7)$$

avec  $\omega_{\vec{p}} = (\vec{p}^2 + m^2)^{1/2}$ . Il est temps d'en dire encore un peu plus sur les opérateurs de création et d'annihilation. Effectivement, dans la première section, les opérateurs de création et d'annihilation permettaient d'ajouter des quanta dans les oscillateurs. Dans la deuxième section, nous avons introduit le formalisme mathématique de ces opérateurs et nous en avons conclu que ceux-ci permettaient d'ajouter une particule ayant une certaine fonction propre  $\varphi_i$  (donc étant dans un certain état quantique). À la dernière sous section, nous avons réalisé qu'ils étaient en réalité des champs quantiques. Maintenant, en passant à l'espace de Fourier de notre champ  $\hat{\phi}(\mathbf{p}, t)$  il est possible de justifier notre affirmation du début de chapitre, c'est-à-dire que l'on peut considérer chaque mode du champ comme un oscillateur harmonique indépendant[9]. Cela justifie donc l'introduction des opérateurs  $a_{\mathbf{p}}^\dagger$  et  $a_{\mathbf{p}}$  qui permettent de créer et annihiler des particules avec une certaine quantité de mouvement. D'ailleurs, il en découle que les états  $a_{\mathbf{p}}^\dagger$  appliqués sur l'état du vide ont pour nombres quantiques  $E$ ,  $\mathbf{p}$  et  $m$  et on dit que ces états sont les excitations des particules [9].

Nous pouvons alors écrire l'hamiltonien comme :

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x \left[ (\partial_0\Phi(x))^2 + \frac{1}{2}(\nabla\Phi(x))^2 + \frac{1}{2}m^2(\Phi(x))^2 \right]. \quad (4.8)$$

Connaissant  $\hat{\Phi}(x)$ , nous avons donc les relations :

$$\partial_0\Phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}} \left[ a_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} - a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right], \quad (4.9)$$

et

$$\nabla\hat{\Phi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{i\vec{p}}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left[ a_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right]. \quad (4.10)$$

Avec ces relations, on peut développer l'hamiltonien sous les deux formes suivantes, soient [6] :

$$H = \int d^3p \omega_{\vec{p}} \left[ a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \right], \quad (4.11)$$

et

$$H = \int d^3p \omega_{\vec{p}} \left[ a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + \frac{1}{2} (2\pi)^3 \delta^3(0) \right]. \quad (4.12)$$

Nous nous heurtons toutefois à un problème, car l'intégrale  $\int d^3p \delta^3(0)$  est divergente à l'infini, ce qui n'est pas cohérent ! Heureusement, ce problème peut être réglé. Il est toutefois important de s'intéresser au sens physique de l'intégrale que nous venons d'écrire. En fait, si nous évaluons de la sorte l'hamiltonien, nous allons tomber directement sur l'énergie totale, ce qui se traduit par l'infinité obtenue avec l'intégrale [6]. Il aurait été plus propice de calculer une différence d'énergie au lieu de calculer l'énergie totale [6]. C'est d'ailleurs ce qui est fait expérimentalement [11]. Afin de résoudre ce problème, il est nécessaire d'étudier *l'ordre normal*. Par exemple, si nous avons un ensemble de champs, il est possible de l'ordonner en mettant à gauche tous les opérateurs de création. Par exemple, si l'action d'ordonner s'écrit comme :

$$N\{\hat{A}\hat{B}\hat{C}^\dagger\hat{X}^\dagger\hat{Y}\hat{Z}\}, \quad (4.13)$$

on obtiendra :

$$= \{\hat{C}^\dagger\hat{X}^\dagger\hat{A}\hat{B}\hat{Y}\hat{Z}\}. \quad (4.14)$$

Il est à noter que, pour des champs associés aux fermions, de telles permutations dans l'ordre des champs fait apparaître des facteurs  $(-1)$ . Sachant maintenant ordonner nos champs, nous pouvons repartir de la forme 4.11 que :

$$\begin{aligned} N[\hat{H}] &= \frac{1}{2} \int d^3p \omega_{\vec{p}} N \left[ a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \right], \\ &= \frac{1}{2} \int d^3p \omega_{\vec{p}} \cdot 2 a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}, \\ &= \int d^3p \omega_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Nous avons donc atteint la fin de la cinquième étape qui était d'obtenir une expression bien ordonnée ! Cette dernière expression pour l'hamiltonien permet donc d'éviter d'obtenir une intégrale divergente. On a donc maintenant notre première théorie quantique des champs pour les champs scalaires !



## Conclusion

La théorie quantique des champs s'impose comme l'outil par excellence pour bâtir une physique des particules solide et féconde. Au terme de toutes ces pages, qui ne représentent qu'une fraction de la pointe de l'iceberg, nous avons pu toucher plusieurs concepts qui permettent d'avoir de meilleures bases pour s'attaquer à une éventuelle compréhension plus globale de cette matière qui, disons le, fait habituellement objet de cours gradués extrêmement denses. Pour mettre en valeur ces nouveaux acquis, une éventuelle suite du travail aurait pu être l'étude de l'électrodynamique quantique. Effectivement, il serait possible, à partir des notions acquises et quelques autres notions, de construire les espaces de Fock des photons et des électrons/positrons. En plus de pouvoir refaire le travail pour obtenir les opérateurs d'annihilation et de création, on aurait pu consolider le lien entre les oscillateurs harmoniques et les champs libres électromagnétiques. Dans cette perspective, il n'y a sans doute pas de meilleures façons de boucler la boucle qu'ainsi :

$$H_{photon} = \sum_{\mathbf{p}} \sum_{s=1}^3 \omega_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p},s}^\dagger a_{\mathbf{p},s} + \frac{1}{2}I) + \omega_{\mathbf{p}} (\frac{1}{2}I - a_{\mathbf{p},0}^\dagger a_{\mathbf{p},0})$$

$$H_{electron} = \sum_{\mathbf{p}} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \mathbf{p} (b_{\mathbf{p},s}^\dagger b_{\mathbf{p},s} + \frac{1}{2}I)$$

$$H_{positron} = \sum_{\mathbf{p}} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \mathbf{p} (c_{\mathbf{p},s}^\dagger c_{\mathbf{p},s} + \frac{1}{2}I)$$

## Bibliographie

- [1] Claude COHEN-TANNOUJJI, Bernard DIU et Franck LALOË. *Mécanique quantique I*. Hermann, 1998. ISBN : 2 7056 6074 7.
- [2] John B. CONWAY. *A Course in Functional Analysis*. Springer, 1990. ISBN : 0-387-97245-5.
- [3] Patrick DESROSIERS. *Physique mathématique I : Notes de cours*. Université Laval, 2015.
- [4] Mike HERMELE. *Second Quantization*. URL : [http://www.colorado.edu/physics/phys7450/phys7450\\_sp10/notes/2nd\\_quantization.pdf](http://www.colorado.edu/physics/phys7450/phys7450_sp10/notes/2nd_quantization.pdf).
- [5] Charles KITTEL. *Introduction à la physique de l'état solide*. Dunod University, 1972. ISBN : 2 04 005248 8.
- [6] Tom LANCASTER et Stephen J. BLUNDELL. *Quantum Field Theory for the Gifted Amateur*. Oxford University Press, 2014. ISBN : 978-0-19-969932-2.
- [7] Micheal LUKE. *PHY2403F Quantum Field Theory I - Lecture Notes*. URL : [https://www.physics.utoronto.ca/~luke/PHY2403F/References\\_files/lecturenotes.pdf](https://www.physics.utoronto.ca/~luke/PHY2403F/References_files/lecturenotes.pdf).
- [8] Laboratoire de recherche en mathématiques LYON/SAINT-ETIENNE. *THE ALGEBRA OF CANONICAL COMMUTATION RELATIONS*. URL : <http://math.univ-lyon1.fr/~attal/Mescours/fock.pdf>.
- [9] Luc MARLEAU. *Introduction à la physique des particules : Notes de cours*. Université Laval, 2017.
- [10] Pierre MATHIEU. *Méthodes mathématiques en physique : Notes de cours*. Université Laval, 2017.
- [11] Michael PESKIN et Daniel V. SCHROEDER. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Perseus Books, 1995. ISBN : 0-201-50397-2.
- [12] Glenn ROWE. *Coupled oscillators in terms of creation and annihilation operators ; phonons*. URL : <http://www.physicspages.com/2014/12/13/coupled-oscillators-in-terms-of-creation-and-annihilation-operators-phonons/>.
- [13] David TONG. *Quantum Field Theory*. Cambridge University, 2007.
- [14] Eberhard ZEIDLER. *Quantum Field Theory II : Quantum Electrodynamics*. Springer, 2009. ISBN : 978-3-540-85376-3.