

Théorie de Kaluza-Klein

Rapport présenté pour le cours *Physique des particules* (PHY-3501)

Rébecca Tardif (111 098 286)

Département de physique, de génie physique et d'optique

Faculté des sciences et de génie, Université Laval

rebecca.tardif.1@ulaval.ca

Rebecca Breton (111 097 973)

Département de physique, de génie physique et d'optique

Faculté des sciences et de génie, Université Laval

rebecca.breton.1@ulaval.ca

5 avril 2017
Université Laval, Québec

Table des matières

1	Introduction	1
2	Notions mathématiques de la relativité générale	2
2.1	Tenseur métrique de l'espace-temps, vecteurs et covecteurs de base	2
2.2	Symboles de Christoffel	3
2.3	Le tenseur de Riemann et le tenseur de Ricci	4
2.4	Tenseur énergie-impulsion	5
3	Théorie de la relativité générale d'Einstein	6
3.1	L'action d'Einstein-Hilbert et la dérivation de l'équation d'Einstein	8
4	Théorie de l'électromagnétisme de Maxwell	9
4.1	L'unification de l'électricité et du magnétisme	9
4.2	Un problème persistant : le milieu de propagation	9
4.3	Les équations de Maxwell et le tenseur d'énergie électromagnétique	10
5	La naissance d'une théorie	12
5.1	L'idée de Kaluza	12
5.2	La contribution de Klein	13
6	Explication de la théorie conceptuellement	15
6.1	Le funambule, la fourmi et Kaluza-Klein	15
6.2	Les géodésiques	16
6.3	Retour rapide sur le concept de Kaluza-Klein : la topologie	16
7	Théorie de Kaluza	18
8	Théorie de Kaluza-Klein	20
9	Difficultés de la théorie	23
9.1	La masse d'une particule test de charge $q = e_0$	23
9.1.1	Évaluation de la longueur d'onde maximale	24

9.1.2	Évaluation de la masse d'une particule de charge $q = e_0$	25
9.2	Problèmes liés à l'expérimentation	26
10	La théorie moderne de Kaluza-Klein	28
11	Conclusion	30

1 Introduction

Introduction rédigée par Rébecca Tardif¹

Il y a quatre forces fondamentales connues qui régissent l'univers : la gravitation, l'électromagnétisme, la force nucléaire forte et la force nucléaire faible. C'est dans l'idée d'une tentative d'unification de deux de ces forces, la gravitation et l'électromagnétisme, par Albert Einstein et bien d'autres physiciens qu'en 1919, un physicien et mathématicien polonais, Theodor Kaluza, proposa l'ajout d'une cinquième dimension aux quatre dimensions connues de l'espace-temps dans le but de permettre cette unification. En effet, c'est dans un article adressé à Einstein en 1919 qu'il propose que la structure spatiale de l'univers puisse posséder plus de dimensions que les trois connues². Pour expliquer l'ajout d'une autre dimension spatiale, il introduit les concepts de dimension étendue et de dimension enroulée. Ces concepts sont ensuite explicités et affinés par le mathématicien suédois Oskar Klein en 1926, menant ainsi à la théorie de Kaluza-Klein qui inspira bien d'autres théories telle la théorie des cordes. Dans ce travail, il sera question de notions mathématiques importantes au traitement de la théorie de Kaluza-Klein, la présentation des champs à unifier puis la théorie de Kaluza-Klein elle-même de façon conceptuelle et mathématique.

1. Note : Les références complètes des oeuvres et pages consultées se trouvent dans la section *Bibliographie*

2. Brian Greene, *L'Univers élégant*, p.298

2 Notions mathématiques de la relativité générale

Section rédigée par Rebecca Tardif

Un survol des notions mathématiques de base utilisées en relativité générale et découlant de celle-ci est présenté ici. À partir de ces bases, un développement plus logique de la théorie d'Einstein sera présenté dans la section suivante.

2.1 Tenseur métrique de l'espace-temps, vecteurs et covecteurs de base

Partons de l'espace-temps classique, soit une variété M en 4 dimensions : 3 dimensions spatiales et une dimension temporelle. Le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ décrit la géométrie locale de l'espace-temps. Il permet de mesurer des distances et génère les connections utilisées pour créer les équations géodésiques et le tenseur de Riemann (dont nous discuterons plus tard). Concrètement, le tenseur métrique définit le produit scalaire de deux vecteurs ainsi :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^\mu b^\nu g_{\mu\nu}$$

Où la convention de sommation d'Einstein est utilisée. Le tenseur métrique est donc un tenseur d'ordre 2 pouvant être représenté sous la forme d'une matrice 4x4. À partir de l'équation ci-dessus, on peut facilement déduire le lien qui existe entre la métrique et les vecteurs de base de l'espace :

$$g_{\mu\nu} = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu$$

Les vecteurs de base de l'espace définissent donc de façon unique tous les éléments du tenseur métrique. Les covecteurs de base de l'espace, également appelés 1-formes de base, doivent donc également être reliés d'une façon ou d'une autre à cette métrique. Puisqu'il s'agit de la base duale des vecteurs de base, ils définissent l'inverse du tenseur métrique³ :

$$g^{\mu\nu} = \boldsymbol{\omega}_\mu \cdot \boldsymbol{\omega}_\nu$$

À partir de ces deux formes du tenseur métrique, il est possible d'effectuer, par contraction tensorielle, toutes les opérations visant à monter ou descendre les indices d'un tenseur donné, dont le passage d'un vecteur à une 1-forme est l'opération la plus élémentaire.

Les composantes de la métrique peuvent prendre différentes formes, mais le cas particulier de la relativité restreinte est particulièrement utile. Dans l'approximation des masses faibles où l'espace-temps n'est courbé que de façon négligeable, $g_{\mu\nu}$ est la métrique dite de Minkowski, définie par :

3. Schutz, *A first course in general relativity*, page 68

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Soit une signature $(+, -, -, -)$.

Une autre façon d'exprimer un tenseur métrique est à partir de sa forme différentielle. Dans le cas de la métrique de Minkowski, cette représentation donne :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

2.2 Symboles de Christoffel

Les symboles de Christoffel sont utilisés pour calculer la géométrie de l'espace et ils sont définis comme étant les dérivées partielles des vecteurs de la base naturelle

$$\partial_j \mathbf{e}_i = \Gamma_{ij}^k \mathbf{e}_k$$

Avec toutes les permutations d'indices, il y a donc 64 symboles de Christoffel au total dans un espace-temps en 4 dimensions. Ceux-ci sont notamment essentiels pour calculer la dérivée covariante d'un vecteur donné, ici, \mathbf{A} :

$$\nabla_j A^k = \partial_j A^k + A^i \Gamma_{ij}^k$$

Une propriété importante des symboles de Christoffel est l'interchangeabilité de ses indices inférieurs⁴. Donc :

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$$

Ce qui réduit à 40 le nombre de symboles de Christoffel qui doivent être déterminés. Les symboles de Christoffel peuvent être calculés directement à partir de la métrique. Pour cela, on prend le produit scalaire de l'équation ci-dessus avec un des vecteurs de base, disons \mathbf{e}_l , et on utilise la définition du tenseur métrique, soit : $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$

$$\Gamma_{ij}^k \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l = (\partial_j \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_l$$

$$\Gamma_{ij}^k g_{kl} = \partial_j (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_l) - (\partial_j \mathbf{e}_l) \cdot \mathbf{e}_i = \partial_j g_{il} - \Gamma_{lj}^k \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_i$$

$$\Gamma_{ij}^k g_{kl} = \partial_j g_{il} - \Gamma_{lj}^k g_{ki} \Rightarrow \Gamma_{ij}^k g_{kl} + \Gamma_{lj}^k g_{ki} = \partial_j g_{il}$$

Une expression qui fait intervenir uniquement la métrique et les symboles de Christoffel, en s'affranchissant ainsi des vecteurs de base. À la suite de quelques autres manipulations mathématiques

4. Schutz, *A first course in general relativity*, page 133

afin d'isoler et de découpler chacuns de ces symboles de Christoffel⁵, on obtient comme expression :

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2}g^{ml}(\partial_j g_{il} + \partial_i g_{lj} - \partial_l g_{ij})$$

Il est important de spécifier que bien que les symboles de Christoffel soient écrits dans la même notation que les tenseurs, ils ne sont pas les composantes d'un tenseur.

2.3 Le tenseur de Riemann et le tenseur de Ricci

Le tenseur de Riemann-Christoffel est le tenseur de courbure de l'espace riemannien. Concrètement, il s'agit d'un champ tensoriel décrivant en chaque point de l'espace à quel degré celui-ci est proche (ou éloigné) de la physique d'un espace plat. Il décrit donc comment des géodésiques vont évoluer l'une par rapport à l'autre : une forte courbure entraînera un éloignement ou un rapprochement rapide des géodésiques⁶. Le tenseur de Riemann-Christoffel s'écrit de la façon suivante :

$$R_{\mu\nu\beta}^{\alpha} = \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} - \partial_{\beta}\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\nu\eta}^{\alpha}\Gamma_{\mu\beta}^{\eta} - \Gamma_{\beta\eta}^{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\eta}$$

Puisqu'il est du 4^e ordre, il a donc a priori N^4 composantes. Cependant, plusieurs identités réduisent le nombre de composantes indépendantes. En descendant l'indice α avec la métrique et en appliquant la définition des symboles de Christoffel, on trouve en effet :

$$R_{\alpha\mu\nu\beta} = \frac{1}{2}(\partial_{\mu}\partial_{\beta}g_{\nu\alpha} + \partial_{\nu}\partial_{\alpha}g_{\beta\mu} - \partial_{\mu}\partial_{\alpha}g_{\beta\nu} - \partial_{\nu}\partial_{\beta}g_{\mu\alpha})$$

De laquelle on peut déduire facilement les symétries et antisymétries suivantes⁷ :

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu}$$

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\nu\mu\alpha\beta} = -R_{\mu\nu\beta\alpha} = R_{\nu\mu\beta\alpha}$$

Ainsi qu'une règle de cyclicité, qu'on appelle première identité de Bianchi :

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} + R_{\mu\beta\nu\alpha} + R_{\mu\alpha\beta\nu} \equiv 0$$

Une seconde identité de Bianchi découle également du tenseur de Riemann :

$$\nabla_{\gamma}R_{\alpha\mu\nu\beta} + \nabla_{\nu}R_{\alpha\mu\beta\gamma} + \nabla_{\beta}R_{\alpha\mu\gamma\nu} = 0$$

5. Schutz, *A first course in general relativity*, page 134

6. Pour plus d'informations sur la signification physique des géodésiques, consulter la section 6.2

7. Schutz, *A first course in general relativity*, page 160

Ainsi, le nombre de composantes indépendantes tombe à $N^2(N^2 - 1)/12$. Ce nombre est nul en 1D, montrant qu'il n'y a pas de courbure. En 2D, il y a une seule composante indépendante, 6 en 3D et 20 en 4D.

Le tenseur de Ricci est la contraction du tenseur de Riemann et il décrit la déformation de l'espace temps :

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda} = R_{\nu\mu}$$

Le tenseur de Ricci peut à son tour être contracté à l'aide du tenseur métrique (en fait, son inverse); c'est ce qu'on appelle la courbure scalaire, ou scalaire de Ricci :

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

2.4 Tenseur énergie-impulsion

Le tenseur d'énergie-impulsion, $T_{\mu\nu}$, est un tenseur d'ordre 2 utilisé pour représenter la répartition de masse et d'énergie dans l'espace-temps d'un système donné :

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T_{00} & T_{01} & T_{02} & T_{03} \\ T_{10} & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{30} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

avec T_{00} qui représente la densité d'énergie, T_{01} , T_{02} et T_{03} le flux d'énergie, T_{10} , T_{20} et T_{30} la densité du moment et les autres le flux du moment. Le tenseur d'énergie-impulsion a plusieurs propriétés fondamentales. Premièrement, il est symétrique :

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$$

De plus, il obéit à la loi de conservation :

$$\nabla^{\mu} T_{\mu\nu} = 0$$

3 Théorie de la relativité générale d'Einstein

Section rédigée par Rébecca Tardif

La relativité générale d'Albert Einstein est une théorie de la gravitation qu'il a développée entre 1907 et 1915 dans le but de décrire la gravité tout en respectant la relativité restreinte développée en 1905. La relativité générale englobe et supprime la théorie de la gravitation universelle d'Isaac Newton. En effet, la théorie de la gravitation de Newton décrit très correctement les mouvements terrestres et célestes puisqu'elle représente la limite aux petites vitesses et aux champs gravitationnels faibles. Cependant, elle est incapable d'expliquer certains détails tels que des anomalies minimes sur l'orbite de Mercure, là où la relativité générale ne fait pas défaut.⁸

Conceptuellement, la relativité générale d'Albert Einstein énonce que la gravitation n'est pas une force, mais la manifestation de la courbure de l'espace-temps. Il décrit la structure de l'espace-temps avec des tenseurs qui, eux, s'obtiennent à l'aide de l'équation du champ d'Einstein suivante :

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \left(\frac{1}{2}R + \Lambda \right) g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

On retrouve donc dans cette équation le tenseur de Ricci, la courbure scalaire, la métrique et le tenseur énergie-impulsion, des notions décrites dans la section ci-dessus. κ est la constante d'Einstein, un scalaire qui sera étudié plus loin⁹, et Λ est la constante cosmologique, introduite à l'origine par Einstein pour un univers statique soit, un univers qui n'est ni en expansion, ni en contraction. Dans la formulation moderne de cette équation, on utilise $\Lambda = 0$. On obtient donc :

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

L'équation du champ d'Einstein consiste à écrire une relation entre la géométrie et l'énergie-impulsion. Tout comme pour les équations de Maxwell, on ne peut pas démontrer l'équation d'Einstein. Cependant on peut argumenter que c'est l'équation la plus simple possible qui satisfait la relation entre la géométrie et l'énergie-impulsion, qu'elle est mathématiquement cohérente et qu'elle redonne l'équation de Newton dans une limite appropriée. Ces points sont discutés ci-dessous

Premièrement, puisqu'on a à droite de l'équation $T_{\mu\nu}$, qui est le tenseur d'énergie-impulsion, on doit avoir à gauche un tenseur également symétrique et d'ordre deux construit avec la courbure.

8. https://en.wikipedia.org/wiki/Introduction_to_general_relativity, page consultée le 26 mars 2017

9. <https://hal.archives-ouvertes.fr/ce1-00092961/document>, page consultée le 27 mars 2017

On utilise donc $R_{\mu\nu}$, le tenseur de Ricci et $g_{\mu\nu}$, le tenseur métrique.

De plus, ce côté droit doit respecter la loi de conservation du tenseur énergie-impulsion, soit :

$$\nabla_\nu T_{\mu\nu} = 0$$

Compte tenu de la seconde identité de Bianchi, l'équation d'Einstein est justement la seule combinaison possible des tenseurs identifiés ci-dessus, soit le tenseur de Ricci et le tenseur métrique, qui respecte cette restriction.

Donc, s'il y a absence de matière, soit ($T_{\mu\nu} = 0$) le tenseur de Ricci et la courbure sont nuls. Conceptuellement, dans un espace-temps de dimension ≤ 3 , ceci implique que le tenseur de courbure est nul. Ainsi, selon Einstein, il ne peut y avoir de gravitation dans un sens usuel que pour une dimension ≥ 4 .

Ensuite, la constante d'Einstein κ est justement fixée par le fait que la théorie de la relativité générale d'Einstein respecte la gravitation de Newton dans la limite des champs faibles. En appliquant la théorie des perturbations pour des particules contribuant à $T_{\mu\nu}$ ayant des vitesses faibles par rapport à c (la constante de la vitesse de la lumière, $299\,792\,458\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$), on obtient :

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$$

Si on choisit de travailler en unités géométriques où $G = c = 1$ (G qui est la constante gravitationnelle, $\approx 6.6742 \times 10^{-11}\text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$), on a alors comme nouvelle expression pour l'équation d'Einstein :

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$$

Cette équation revient à la gravitation de Newton lorsque l'on fait l'approximation des champs faibles et des mouvements lents. Plus précisément, on peut montrer qu'on retrouve dans ce cas l'équation de Poisson :

$$\nabla^2\Psi = 4\pi G\rho$$

Avec Ψ le potentiel gravitationnel et ρ la masse volumique.

Finalement, l'équation d'Einstein donne lieu à 10 équations aux dérivées partielles non linéaires reliant les composantes des tenseurs impliqués. Cela distingue la relativité générale des équations de Maxwell de l'électromagnétisme qui sont linéaires par rapport aux champs électriques et magnétiques.

3.1 L'action d'Einstein-Hilbert et la dérivation de l'équation d'Einstein

Il est possible de déduire l'équation d'Einstein d'un principe de moindre action en introduisant l'action d'Einstein-Hilbert S_H . Une version simplifiée de ce développement est présentée ici.

Cette action est l'intégrale sur l'espace-temps de la densité de Lagrange (\mathcal{L}_H) :

$$S_H = \int d^4x \mathcal{L}_H$$

\mathcal{L}_H est une densité de tenseur qui sert à décrire la dynamique du référentiel étudié. Il s'obtient en multipliant $\sqrt{-g}$ (g qui est le déterminant du tenseur métrique) par un scalaire. On utilise le scalaire de Ricci R , car c'est le seul scalaire indépendant dérivant de ce tenseur.

Donc :

$$\mathcal{L}_H = \sqrt{-g}R$$

On se retrouve donc avec :

$$S_H = \int d^4x \sqrt{-g}R$$

En sachant que les équations du mouvement résultent de la variation de l'action dans la métrique et que $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, on peut retrouver l'équation suivante pour la variation de cette action par rapport à la métrique :

$$\delta S_H = \int d^4x \sqrt{-g} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu}$$

En raison du principe de moindre action, l'action de Einstein-Hilbert doit être invariante sous un changement de métrique. Donc :

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_H}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0$$

Ce qui correspond à l'équation d'Einstein dans le vide.¹⁰

10. <https://hal.archives-ouvertes.fr/cel-00092961/document>, page consultée le 27 mars

4 Théorie de l'électromagnétisme de Maxwell

Section rédigée par Rebecca Breton

4.1 L'unification de l'électricité et du magnétisme

Vers 1864, James Clerk Maxwell élabore des équations permettant d'unifier les comportements observés expérimentalement de l'électricité et du magnétisme. Les prédécesseurs de Maxwell étudiaient ces deux phénomènes individuellement et ne pouvaient les lier. Il a su unifier l'électricité et le magnétisme en introduisant le nouveau concept de courant de déplacement.¹¹ Il élabore d'abord une vingtaine d'équations différentielles qu'il réduira ensuite à huit. Maxwell peut ainsi expliquer comment les champs électriques et magnétiques sont générés par des courants et des charges et décrits par un seul champ : le champ électromagnétique. L'électromagnétisme est né. Les fameuses quatre équations de Maxwell que nous connaissons aujourd'hui ont été reformulées par Oliver Heaviside sous la forme d'équations vectorielles formées de dérivées partielles.¹²

4.2 Un problème persistant : le milieu de propagation

L'unification de l'électricité et du magnétisme par Maxwell a eu des impacts énormes sur la physique de l'époque. Toutefois, un problème persiste. Maxwell suggère la présence d'un milieu (l'éther croyait-il) pour la propagation des ondes et pour que ses équations soient valides. Toutefois, les expérimentations, comme celle de Michelson-Morley¹³, ne démontre pas la présence de l'éther. Ce problème est d'ailleurs à l'origine de la théorie de la relativité restreinte d'Einstein.

Maxwell avait prédit, à l'aide de sa théorie, l'existence d'une onde transmise par les champs électriques et magnétiques. Ainsi, il prédisait que la variation en un point de paramètres électromagnétiques avait des effets à un autre point après un certain temps. Il estime la vitesse de cette onde à $310\,740\,000\text{ m/s}$ et y associe le comportement de la lumière. C'est Albert Einstein qui parvient à solutionner le problème de milieu de transmission et de référentiel de Maxwell grâce à la relativité mentionnée dans la section précédente. Einstein utilise la constante de la vitesse de la lumière de Maxwell pour unifier les concepts de temps et d'espace.

11. David K. Cheng, *Field and Wave Electromagnetics*, page 1

12. https://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell's_equations, page consultée le 28 mars 2017

13. https://fr.wikipedia.org/wiki/Exp%C3%A9rience_de_Michelson-Morley, page consultée le 28 mars 2017

4.3 Les équations de Maxwell et le tenseur d'énergie électromagnétique

Le traitement mathématique des équations de Maxwell dans un contexte de relativité pour la théorie de Kaluza-Klein est grandement facilité par la notation tensorielle. Classiquement les quatre équations de Maxwell suivantes fonctionnent très bien pour un grand nombre de photons :¹⁴

$$\begin{aligned}
 1. \quad \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & 2. \quad \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\
 3. \quad \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & 4. \quad \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)
 \end{aligned}$$

On peut réécrire ces mêmes équations avec le potentiel vecteur du champ magnétique \mathbf{A} et du potentiel électrique Φ . Sachant que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ et $\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$, on obtient les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 t} - \nabla^2 \phi &= \rho & \frac{\partial^2 \mathbf{A}^2}{\partial^2 t} - \nabla^2 \mathbf{A}^2 &= \mathbf{J} \\
 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} &= \rho & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} &= 0
 \end{aligned}$$

Il est important de noter que les champs électriques et magnétiques sont invariants sous une transformation de gauge $U(1)$ donnant :¹⁵

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &\Rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\alpha = \mathbf{A} - ie^{-i\alpha}\nabla e^{i\alpha} \\
 \Phi &\Rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \Phi + \frac{i}{c}e^{-i\alpha}\frac{\partial}{\partial t}e^{i\alpha}
 \end{aligned}$$

14. http://web.hep.uiuc.edu/home/serrede/P436/Lecture_Notes/P436_Lect_19.pdf page consultée le 28 mars 2017

15. http://insti.physics.sunysb.edu/itp/lectures/01-Fall/PHY505/06a/Lecture-Notes_HF.pdf, page consultée le 29 mars 2017

On cherche maintenant à définir le tenseur d'énergie de l'électromagnétisme. Avec les quadri-vecteurs électromagnétiques et de courant suivant :

$$A_\mu = (\phi, A_1, A_2, A_3)$$

$$J^\mu = (-\rho, J_1, J_2, J_3)$$

Le tenseur de Faraday sert à décrire le champ électromagnétique est défini comme (avec la signature de Minkowski (+,-,-,-)) :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix}$$

À partir de cette définition, il est possible de décrire l'électromagnétisme de façon tensorielle telle que :

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = J_\nu$$

$$34ty(F_{\mu\nu;\lambda} + F_{\lambda\mu;\nu} + F_{\nu\lambda;\mu}) = 0$$

Finalement, on peut connaître l'effet des champs électromagnétiques sur la courbure de l'espace temps à l'aide du tenseur de l'électromagnétisme qui s'exprime comme :¹⁶

$$T_{EM}^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left[F^{\mu\alpha} F_\alpha^\nu - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right]$$

En unité gaussienne, nous avons que $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi}$, $\mu_0 = 4\pi$ et $c = 1$

Avec $\eta^{\mu\nu}$ étant le tenseur de Minkowski toujours de signature (+,-,-,-) et avec $c=1$:¹⁷

$$T_{EM}^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{8\pi}(E^2 + B^2) & -S_x & -S_y & -S_z \\ -S_x & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ -S_y & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ -S_z & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

avec le vecteur de Poynting :

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{4\pi}$$

et avec le tenseur de contraintes de Maxwell défini comme :

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left[E_i E_j + B_i B_j - \frac{1}{2} (E^2 + B^2) \delta_{ij} \right]$$

16. https://en.wikipedia.org/wiki/Electromagnetic_tensor

17. Bo Thidé, *Electromagnetic Field Theory*, chapitre 3 et page 156.

5 La naissance d'une théorie

Section rédigée par Rebecca Breton

5.1 L'idée de Kaluza

Toujours dans le même esprit d'unification que Maxwell, Einstein tenta en vain de démontrer que la gravité et l'électromagnétisme était, sous certaines conditions, la représentation d'un unique et même champ. Les fortes ressemblances¹⁸ entre le champ électrique et le champ gravitationnel l'ont motivé à chercher dans cette voie.

En effet, la force qui s'exerce entre deux particules chargées est analogue à celle entre deux particules massives. C'est donc en comparant les formules mathématiques entre la force de Coulomb (qui est la force électrique fondamentale) et la force gravitationnelle que l'on peut fonder une analogie entre les deux classes de phénomènes. On peut faire facilement un parallèle entre la masse (m) et la charge (q) et entre les constantes de proportionnalité G et $\frac{1}{4\pi\epsilon}$. Un élément très important est que les forces des deux champs varient de façon inversement proportionnelle au carré de la distance.

Dans cet engouement scientifique pour l'unification des forces, Einstein est loin d'être le seul à se questionner. En avril 1919, le physicien et mathématicien allemand Théodor Kaluza travaille sur la relativité générale en cinq dimensions.¹⁹ Il s'intéressait plutôt aux mathématiques du concept qu'à l'idée d'unification elle-même. Il n'est d'ailleurs pas le premier à avoir l'idée d'une cinquième dimension, mais l'approche qu'il utilise est très particulière. Kaluza reformule les équations du champ gravitationnel d'Einstein en ajoutant une dimension qui sera associée aux interactions électromagnétiques. Il retrouve les équations de la relativité d'Einstein mais en plus, les équations de l'électromagnétisme de Maxwell. Il comprend qu'il peut voir le tenseur métrique en cinq dimensions comme un tenseur métrique en quatre dimensions de l'espace temps couplé à un vecteur d'énergie électromagnétique et à un champ scalaire. Kaluza, excité de sa découverte, envoie une courte lettre Einstein. Celui-ci est séduit par la théorie de Kaluza et lui répond rapidement dans une lettre *"J'ai le plus grand respect pour la beauté et la finesse de votre conception"*.²⁰

18. <http://physiquepcsimoreggia.hautetfort.com/media/00/01/1788462238.pdf> page consultée le 29 mars 2017

19. Paul S Wesson, *Five-Dimensional Physics*, page 3

20. https://fr.wikipedia.org/wiki/Theodor_Kaluza page consultée le 29 mars 2017.

Malgré l'enthousiasme d'Einstein, celui-ci a attendu deux ans avant d'en motiver la publication. Kaluza publie sa théorie d'unification en cinq dimensions et définit dans son document toute la métrique, les équations de champs et du mouvement et le tenseur énergie-impulsion. Il y énonce aussi l'hypothèse de la "condition du cylindre" qui stipule qu'aucun élément de la métrique en cinq dimensions ne dépend de cette cinquième dimension directement.²¹ Kaluza ne réussit pas vraiment à expliquer les raisons pour lesquelles on ne peut percevoir cette cinquième dimension. Il était très conscient des limites de ce qu'il avançait mais était très confiant d'être sur une bonne piste. Peu après la publication, la théorie de Kaluza tombe dans l'oubli pendant un certain moment. La théorie initiale de Kaluza sera développée davantage dans les sections suivantes.

5.2 La contribution de Klein

Vers 1926²², le physicien suédois Oscar Klein s'intéresse à la théorie de Kaluza et y contribue de façon très importante. Klein est inspiré par l'engouement du monde scientifique pour la physique quantique. Il est à l'époque des grandes découvertes d'Heisenberg et de Schrödinger.²³ Dans le but d'expliquer la quantification des charges électriques, il avance les idées suivantes :

- La cinquième dimension est fermée sur elle-même.
- Elle est périodique.
- Elle est circulaire.
- Le rayon de cette dimension circulaire est plus petit qu'un atome.

Ainsi, en assumant que la topologie de la cinquième dimension était recourbée plutôt qu'ouverte, il a su incorporer la théorie quantique à la théorie de Kaluza. On appelle compactification l'enroulement et la miniaturisation de la cinquième dimension. Klein estime la grosseur de cette dimension à la longueur de Plank. Il croit que les charges en mouvement dans la cinquième dimension sont telles des ondes

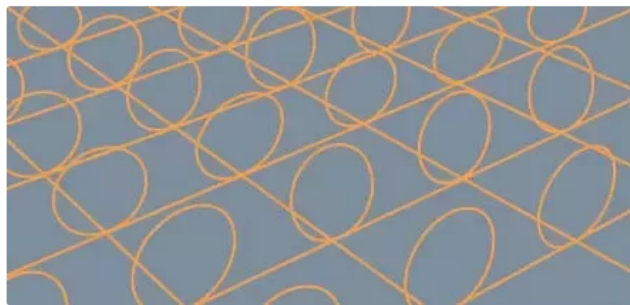


FIGURE 1 – La cinquième dimension enroulée

21. https://en.wikipedia.org/wiki/Kaluza%E2%80%93Klein_theory page consultée le 29 mars 2017

22. Paul S Wesson, *Five-Dimensional Physics*, page 4

23. https://en.wikipedia.org/wiki/Kaluza%E2%80%93Klein_theory page consultée le 29 mars 2017

stationnaires²⁴ et on associerait leur quantification aux multiples entiers de la quantité de mouvement dans la cinquième dimension.

Un problème important de la théorie de Kaluza est que la cinquième dimension ne se manifestait pas sur les autres dimensions et qu'elle n'était pas observable. Klein explique que la cinquième dimension est si petite et si compacte qu'on ne peut observer la dépendance de la métrique sur x^4 .

La théorie fut retravaillée par plusieurs physiciens jusqu'en 1940 puis tomba dans l'oubli. En effet, la découverte des interactions fortes et faibles enleva l'intérêt de la communauté pour l'unification de l'électromagnétisme et du champ gravitationnel. Elle fut ramenée à la surface seulement près de 40 ans plus tard lorsque les physiciens commencèrent à s'intéresser à la théorie des cordes.

24. Stephen Webb, *Out of this world : Colliding Universes, Branes, Strings, and Other Wild ideas of Modern Physics*, page 148

6 Explication de la théorie conceptuellement

Section rédigée par Rebecca Breton

Avant de poursuivre vers un développement mathématique de la théorie de Kaluza-Klein, at-tardons nous un instant à sa compréhension conceptuelle. Il est en effet très peu naturel pour le commun des mortels de s'imaginer cette fameuse cinquième dimension spatiale. Pour mieux comprendre, on évoquera dans cette section deux parallèles intéressants facilitant beaucoup la compréhension de la théorie. On abordera rapidement la notion de géodésique qui sera utile plus tard dans le document. Finalement, nous observerons l'impact topologique de la contribution de Klein à la théorie.

6.1 Le funambule, la fourmi et Kaluza-Klein

D'abord, imaginez que vous êtes un ou une funambule se déplaçant sur un fil. Vos mouvement dans l'univers sont limités à avancer ou à reculer (ignorons le fait que vous puissiez perdre l'équilibre et tomber). Sur ce même fil, se trouve une fourmi. Cette fourmi, étant extrêmement petite, peut se déplacer autour du fil en plus d'avancer et de reculer. Ainsi, comme dans la théorie de Kaluza-Klein, une dimension circulaire est accessible et visible uniquement aux corps extrêmement petits.²⁵

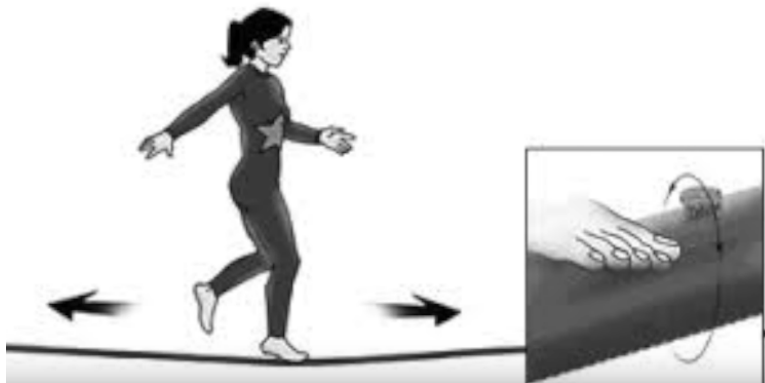


FIGURE 2 – Une fourmis et une funambule

Source de l'image : <https://www.youtube.com/watch?v=HUTo-dLTc78>

25. <https://www.youtube.com/watch?v=HUTo-dLTc78> page consultée le 29 mars 2017

6.2 Les géodésiques

Attardons nous un instant au concept de géodésique.²⁶ Celui-ci sera utile dans une prochaine section. Dans un espace, le chemin le plus court entre deux points est une géodésique. Les géodésiques servent à traiter les particules libres de toutes forces externes à celles étudiées. Dans la variété où la particule se trouve, elle suit une ligne droite. Pourtant, de notre point de vue, sa trajectoire peut sembler différente. Ainsi, les comportements de particules observés en quatre dimensions peuvent être la projection de leur géodésique en cinq dimensions. Ce concept peut aider à comprendre comment un univers en cinq dimensions peut être observé en quatre dimensions et paraître cohérent.

Un parallèle²⁷ intéressant est à faire entre la théorie de Kaluza-Klein et les ombres chinoises. On peut projeter avec nos mains (en 3 dimensions) une image cohérente et familière sur un écran (en 2 dimensions). Le principe est le même dans la théorie de Kaluza-Klein. Notre monde observable en quatre dimensions (trois spatiales et une temporelle) serait la projection de cinq dimensions (4 spatiales et une temporelle).

Pour traiter de la théorie de Kaluza-Klein, on utilise des géodésiques en cinq dimensions et de variété pseudo-riemannienne²⁸ puisqu'une dimension doit avoir son signe opposée aux quatre autres. On obtient ainsi 4 dimensions spatiales et une temporelle. Le but est d'observer la projection des 5 dimensions sur les 4 dimensions usuelles. La géodésique pseudo-riemannienne en cinq dimensions est définie comme :

$$\left(\frac{d^2 x^A}{d\hat{s}^2} + \hat{\Gamma}_{BC}^A \frac{dx^B}{d\hat{s}} \frac{dx^C}{d\hat{s}} \right) = 0$$

Les géodésiques sont les courbes qui répondent à cette équation différentielle.

6.3 Retour rapide sur le concept de Kaluza-Klein : la topologie

Revenons rapidement sur l'ajout de Klein à la théorie de Kaluza. L'idée géniale de Kaluza a été d'ajouter à son étude de la relativité une dimension spatiale supplémentaire. Il traite cette dimension comme si son espace était de même topologie que les autres dimensions,²⁹ c'est-à-dire

26. <https://fr.wikipedia.org/wiki/G%C3%A9od%C3%A9sique> page consultée le 29 mars 2017

27. <http://www.thephysicsmill.com/2013/04/28/stuff-from-shape-kaluza-klein-theory/> consultée le 29 mars 2017

28. J.Gegenberg et G. Kunstatter, *The motion of charged particles in Kaluza-Klein space-time* p.441

29. https://en.wikipedia.org/wiki/Kaluza%E2%80%93Klein_theory, *Group Theory Intepretation*, page consultée le 29 mars 2017

de topologie M^1 . L'ajout de cette dimension a pour effet de modifier la topologie de l'univers. Avec une dimension telle que décrite par Kaluza, on peut décrire la topologie de l'univers comme :

$$M^4 \times M^1 = M^5$$

L'idée de Klein a été de décrire l'espace de la cinquième dimension différemment des autres dimensions. Il la décrit comme un cercle de topologie S^1 plutôt que de topologie M^1 . Après la modification de Klein, la topologie de l'univers est assimilable à un cylindre et s'exprime comme $M^4 \times S^1$. Finalement, une dernière transformation a été appliquée à l'espace de la cinquième dimension circulaire par Klein : sa compactification. Cette transformation a permis de rendre la dimension finie et périodique.

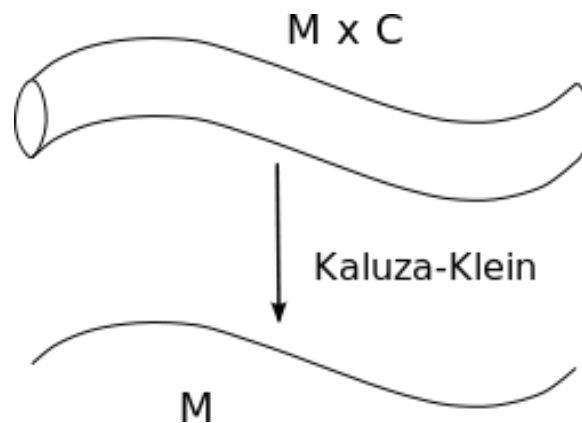


FIGURE 3 – Compactification de l'espace de la cinquième dimension

Source de l'image :

https://en.wikipedia.org/wiki/Kaluza%E2%80%93Klein_theory

7 Théorie de Kaluza

Section rédigée par Rébecca Tardif

Kaluza développe sa théorie sur la base de similarités formelles entre les définitions du champ électromagnétique en terme de leur potentiel et des symboles de Christoffel en terme de la métrique. Dans le but d'intégrer la théorie de Maxwell à la théorie d'Einstein, Kaluza instaure une cinquième dimension. Pour expliquer le fait qu'on ne peut pas voir cette cinquième dimension, il propose la "condition du cylindre" qui signifie que la physique prend place sur une hypersurface quadridimensionnelle de l'espace pentadimensionnel. Cela laisse la relativité générale d'Einstein invariante par rapport à l'ajout d'une nouvelle coordonnée associée à la cinquième dimension. En effet, les dérivées par rapport à celle-ci sont nulles sur l'hypersurface, donc les composantes de la métrique cinq par cinq g_{IJ} ne dépendent pas de la simili-dimension spatiale. Cette nouvelle métrique g_{IJ} est représentée comme suit³⁰ :

$$g_{IJ}^{(5)} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu}^{(4)} & 2\alpha A_\nu \\ 2\alpha A_\mu & 2V \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \partial_5 g_{IJ} = 0$$

On reconnaît le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ de l'espace-temps en quatre dimensions et A_μ qui est le quadrivecteur électrodynamique, représentant le potentiel scalaire ϕ et les trois composantes du potentiel vectoriel magnétique A_1, A_2 et A_3 de la manière suivante :

$$A_\mu = (\phi, A_1, A_2, A_3)$$

Sans oublier α qui correspond à une constante reliée à la constante de Newton κ de façon $\alpha = \sqrt{\kappa/2}$. On retrouve aussi un nouveau champ scalaire $V(x)$.

Kaluza évalua par la suite, le tenseur de Ricci dans l'approximation des champs faibles :

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} g^{ml} (\partial_j g_{il} + \partial_i g_{lj} - \partial_l g_{ij})$$

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda, \quad R_{5\nu} = -\alpha \nabla^\nu F_{\mu\nu}, \quad R_{55} = -\Delta V$$

En étudiant le comportement des particules chargées dans un espace pentadimensionnel, il trouva que la quantité de mouvement dans la cinquième dimension devait être interprétée comme une charge électrique :

$$j^\nu = 2\alpha T^{\nu 5}$$

Il évalua aussi l'équation du mouvement à partir de la forme différentielle du tenseur métrique et obtint l'expression suivante :

30. Van Dongen, Jeroen, *Einstein's Unification*, page 133

$$m \left(\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\mu \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} \right) = 2\alpha F_\nu^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} - \frac{e^2}{m} \partial^\mu V$$

Cette équation est similaire à la force de Lorentz³¹, qui prend la forme :

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\mu \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = \frac{q}{mc} F_\nu^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

en supposant une charge spécifique faible. Malheureusement, pour un électron, cette supposition n'est plus valide. C'est ce problème qui causa initialement le délai de la publication du travail de Kaluza. De plus, Einstein trouva que les équations du champ sous vide de Kaluza ($R_{IJ}^{(5)} = 0$) ne pouvait pas produire de solutions de particules non-singulières et symétriques de rotation. C'est sans-doute la principale raison pour laquelle Einstein n'aurait plus travaillé sur la théorie de Kaluza pendant environ cinq ans. Donc, bien que l'idée d'une cinquième dimension soit alléchante, elle n'a pas permis de décrire la matière chargée tel que désiré initialement.

31. <http://cds.cern.ch/record/466266/files/0009087.pdf>, page consultée le 30 mars

8 Théorie de Kaluza-Klein

Section rédigée par Rebecca Tardif

En 1926, Oskar Klein est revenu à la théorie de Kaluza. Contrairement à Kaluza, Klein introduit les relations quantiques. Cela lui montra que la cinquième dimension peut être représentée comme une dimension enroulée sur elle-même, tel que mentionné dans la section 5.2 et illustré à la figure 4. Il publia un article en 1926, dans lequel il émit une nouvelle interprétation de la métrique en cinq dimension de Kaluza. Cette nouvelle métrique est de la forme suivante³² :

$$g_{IJ}^{(5)} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu}^{(4)} + V A_\mu A_\nu & V A_\nu \\ V A_\mu & V \end{pmatrix}$$

Ou de façon équivalente (avec $V = \phi^2$ et $A_\mu = k A_\mu$) comme :

$$g_{IJ}^{(5)} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu}^{(4)} + \phi^2 k^2 A_\mu A_\nu & \phi^2 k A_\nu \\ \phi^2 k A_\mu & \phi^2 \end{pmatrix}$$

Klein pose que le scalaire V est une constante proportionnelle à $\pm 4\sqrt{\pi G}$, car g_{55} reste invariant pour les transformations des coordonnées générales des quatre dimensions de base de l'espace-temps et de translation de la cinquième dimension. La théorie contient des transformations de jauge électromagnétique comme translation de la cinquième dimension :

$$x^5 \rightarrow x^5 + \Lambda(x^\mu), \quad A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$$

Par conséquent, il trouve les équations de champ de la relativité générale, avec le tenseur d'énergie-impulsion des champs électromagnétiques, et les équations de Maxwell libres de sources :

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad \frac{\partial \sqrt{-g} F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0$$

32. Van Dongen, Jeroen, *Einstein's Unification*, page 135

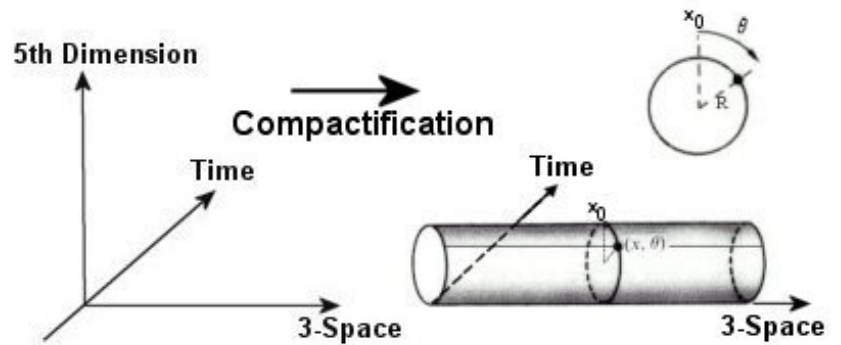


FIGURE 4 – Représentation de la cinquième dimension selon Klein

Source de l'image :

https:

//universe-review.ca/R15-17-relativity14.htm

Il affirme aussi que la théorie reproduit l'équation du mouvement pour des particules chargées à partir de la variation de l'élément infinitésimal de longueur.

Dans son article, il introduit des termes de matière chargée comme des champs d'ondes sans masses en cinq dimension. Klein fait alors le postulat suivant :

$$U = e^{-2\pi i \left(\frac{x^5}{h} - \nu t \right)} \Psi(x, y, z)$$

À partir de ce postulat, il est capable de retrouver l'équation de Schrödinger. Klein attribue donc à la cinquième dimension les mêmes unités que la constantes de Planck h .

Klein réalise que la discrétisation du spectre de charge, via la relation de De Broglie, conduit à une longueur d'onde discrète dans la cinquième direction :

$$p_5 = n \frac{h}{\lambda_5} = \frac{ne}{c\sqrt{2\kappa}}$$

Avec p_5 qui est la quantité de mouvement dans la cinquième direction. Cela indique alors que la cinquième direction doit être compacte, périodique avec une période de $2\pi\lambda_5$. Lorsque l'on introduit les valeurs des paramètres, on trouve que l'échelle de la cinquième direction s'approche de la taille de Planck :

$$\lambda_5 = \frac{hc\sqrt{2\kappa}}{e} = 0.8 \times 10^{-30} \text{ cm}$$

L'importance de cette valeur sur la validation de la théorie sera développée dans la prochaine section. Si on reprend sont postulat, soit :

$$U = e^{-2\pi i \left(\frac{x^5}{h} - \nu t \right)} \Psi(x, y, z)$$

On peut retrouver que la translation $x^5 \rightarrow x^5 + \Lambda(x)$, présentée plus tôt, correspond a la transformation de jauge d'une fonction d'onde.

Dans la théorie de Klein, les paramètres de jauge prennent ainsi des valeurs sur le cercle, montrant que la topologie de l'espace est maintenant représentée comme un cercle plutôt qu'une ligne droite infinie. La dimension d'une ligne droite infinie ne change pas la géométrie, mais un cercle doit avoir une échelle fixe, qui est donnée par λ_5 .

Les équations de la théorie de Kaluza-Klein peuvent aussi être dérivée à partir de l'action d'Einstein-Hilbert. Rappelons qu'en 4D, nous avons la forme :

$$S = -\frac{1}{k^2} \int d^4x \sqrt{-g} R$$

où la valeur de k est fixée à $\pm 4\sqrt{\pi G}$ et avec $g \equiv \det g_{\mu\nu}$. En 5D, la forme est tout-à-fait similaire³³ :

$$S' = -\frac{1}{16\pi G'} \int d^5x \sqrt{-g} R'$$

Avec un nouveau tenseur de Ricci R'_{IJ} , qu'on calcule à partir des nouveaux symboles de Christoffel de la nouvelle métrique en 5D. Concrètement, on obtient comme expression pour le scalaire de Ricci³⁴ :

$$R' = g'^{IJ} R'_{IJ} = g^{\mu\nu} R'_{\mu\nu} + 2g'^{\mu 5} R'_{\mu 5} + g'^{55} R'_{55} = R + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

On a donc comme expression pour l'action en 5D :

$$S' = -\frac{1}{16\pi G'} \int d^5x \sqrt{-g} \left(R + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right)$$

x^5 peut être vue comme une coordonnée angulaire de période $2\pi\rho$ puisque la 5e dimension est cylindrique. Donc, intégrer sur celle-ci pour obtenir à nouveau l'action en 4D devient trivial :

$$S = -\frac{2\pi\rho}{16\pi G'} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right)$$

Donc, en posant :

$$G' = \frac{G}{2\pi\rho}$$

On retrouve en 4D une expression de l'action qui dépend à la fois de l'électromagnétisme et de la gravitation, unifiée sous la métrique de Kaluza-Klein.

33. *A Unified Grand Tour of Theoretical Physics*, page 188.

34. <http://vixra.org/pdf/1406.0172v2.pdf>, page consultée le 03 avril 2017

9 Difficultés de la théorie

Section rédigée par Rebecca Breton

La théorie de Kaluza-Klein originale comporte plusieurs problèmes. Un problème important concerne le ratio charge/masse de l'électron. En effet, avec la théorie on arrive à une masse de l'électron extrêmement grande et très loin des expérimentation. Pour mieux comprendre cette incohérence majeure à la théorie de Kaluza-Klein, nous discuterons dans cette section du principe de compactification de la dimension élaborée par Klein et du procédé mathématique utilisé pour estimer la masse de l'électron dans ce modèle. Nous observerons ensuite les conséquences de ces résultats sur les techniques expérimentales.

9.1 La masse d'une particule test de charge $q = e_0$

Klein explique que les ondes associées aux particules peuvent "tourner" dans la cinquième dimension circulaire. De plus, ces ondes doivent nécessairement être stationnaires pour être observées.³⁵ Il en déduit qu'elles doivent avoir une amplitude constante ou bien une longueur d'onde égale à la division par un entier de la circonférence du cercle formée par la dimension. Sachant que l'énergie et la masse des particules sont inversement proportionnelles à la longueur d'onde, la particule ayant la plus petite masse possible dans ce modèle aurait donc une longueur d'onde infinie. Ces particules aurait par définition une amplitude constante mais une masse nulle. Ainsi, la particule ayant la plus petite masse non nulle dans la cinquième dimension a donc nécessairement une longueur d'onde égale à la circonférence $\lambda_{max} = \lambda_5 = 2\pi R$. Les autres ont des longueurs d'onde possibles correspondent à des fractions entières de la circonférence telles que $\lambda = \frac{2\pi R}{n}$ où n est un entier positif. Celles-ci sont nécessairement associées à des masses plus grandes. C'est à l'aide de la valeur de cette longueur d'onde maximale que l'on peut estimer la masse d'une particule à l'aide de sa charge dans le modèle de Kaluza-Klein. Commençons d'abord par évaluer la valeur de cette longueur d'onde directement liée au rayon de la dimension circulaire de Kaluza-Klein. Une partie du développement mathématique suivant est tirée de l'article *The motion of charged particles in Kaluza-Klein space-time* par J. Gegenberg et G. Kunstatter publié dans *Physics Letters* en 1984.³⁶

35. Stephen Webb, *Out of this world : Colliding Universes, Branes, Strings, and Other Wild ideas of Modern Physics*, page 148

36. J.Gegenberg et G. Kunstatter, *The motion of charged particles in Kaluza-Klein space-time* p.441

9.1.1 Évaluation de la longueur d'onde maximale

Pour traiter ce problème, on utilise la variété pseudo-riemannienne (\hat{M}, \hat{g}) et décompose la métrique de la façon suivante :

$$\hat{g}_{AB}dx^A dx^B = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + \lambda^2(A_\mu dx^\mu + dx^5)^2 \text{ où } \lambda^2 = \hat{g}_{55} \text{ et } A_\mu = \hat{g}_{\mu 5}/\lambda^2 \quad (1)$$

À l'aide de cette dernière définition, on dérive l'action gravitationnelle en 5 dimensions par x^5 et on obtient :

$$S = \frac{2\pi}{16\pi\hat{G}} \int \lambda \sqrt{-g} (\hat{R} - \frac{\lambda^2}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) d^4x \quad (2)$$

Si on pose que la longueur associée à la particule ayant la masse la plus faible est telle que $\lambda(x) = \lambda_5 = \text{constante}$, on doit nécessairement retrouver l'action pour les équations de Maxwell et Einstein préalablement définie comme :

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{-g} (R - \frac{16\pi G}{4} \bar{F}_{\mu\nu} \bar{F}^{\mu\nu}) d^4x \quad (3)$$

Pour respecter l'égalité les équations (2) et (3), on déduit que $\lambda_5/\hat{G} = 1/(2\pi G)$ et que $\bar{F}_{\mu\nu} = (\lambda_5/\sqrt{16\pi G})F_{\mu\nu}$.

L'équation des géodésiques pour notre particule test de variété pseudo-riemannienne est définie comme suit, considérant que \hat{m} est la masse invariante de la particule test :

$$\hat{m} \left(\frac{d^2 x^A}{d\hat{s}^2} + \hat{\Gamma}_{BC}^A \frac{dx^B}{d\hat{s}} \frac{dx^C}{d\hat{s}} \right) = 0$$

En manipulant les équations (1) et (5), on retrouve l'équation quadri-dimensionnelle :

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\hat{s}^2} + \Gamma_{\rho\nu}^\mu \frac{dx^\rho}{d\hat{s}} \frac{dx^\nu}{d\hat{s}} = \frac{\hat{p}\sqrt{16\pi G}}{\hat{m}\lambda_5} \bar{F}_\nu^\mu \frac{dx^\nu}{d\hat{s}} + \frac{\hat{p}^2}{\hat{m}^2} \frac{\lambda_{,\nu}}{\lambda^3} g^{\mu\nu}$$

Considérant que la quantité de mouvement de la particule test est définie comme $\hat{p} = \hat{m}\hat{g}_{5A}dx^A/d\hat{s}$, on obtient la relation suivante :

$$\hat{p} = \frac{q\lambda_5}{\sqrt{16\pi G}}$$

Comme nous souhaitons évaluer le rapport entre la masse/charge d'un électron dont les valeurs sont connues expérimentalement, nous posons que la particule test est l'électron et que $q = e_0$. Considérons que la quantité de mouvement angulaire quantifiée est définie comme $\langle \hat{p} \rangle = n\hbar$. Finalement, avec $c = 1$ et $n = 1$, on évalue la longueur d'onde λ_5 associée à un électron test de masse minimale comme :

$$\lambda_5 = \hbar\sqrt{16\pi G}/e \approx 0,8 \times 10^{-32}m$$

Considérant que cette longueur d'onde $\lambda_5 = 2\pi R$ où R est le rayon de la dimension circulaire :

$$R = \lambda_5/(2\pi)$$

9.1.2 Évaluation de la masse d'une particule de charge $q = e_0$

Il est possible de décomposer le champ de l'onde en série de Fourier tel que :³⁷

$$\psi(x, x^5) = \frac{1}{\lambda_5} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_n(x) e^{inx^5/R}$$

Pour chaque amplitude, on obtient l'équation d'onde quadri-dimensionnelle suivante où D_μ correspond à la double dérivée covariante :

$$\left(D^\mu D_\mu - \frac{n^2}{R^2} \right) \psi_n = 0$$

Considérant que D_μ a la charge $q = e_0$, on peut conclure que $m_n^2 = \frac{n^2}{R^2}$. Donc, la masse de notre particule test est (avec $n=1$) :

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{R} \\ &= \frac{2\pi}{\lambda_5} \\ &= \frac{2\pi}{0,8 \times 10^{-32}} \\ &= 1.54 \times 10^{26} eV = 2,74 \times 10^{-7} g \end{aligned}$$

37. <https://arxiv.org/pdf/hep-ph/9810524.pdf> page consultée le 30 mars 2017

On peut constater ici le problème majeur de la théorie de Kaluza-Klein est qu'il est impossible de décrire une particule ayant la charge e_0 et une si grande masse dans un système si petit. Le rayon de la dimension est de l'ordre de la longueur de Planck ($l_p = 1,616 \times 10^{-35}$)m et la masse de la particule est environ 3×10^{20} fois la masse de l'électron. De telles caractéristiques rendent très difficile voir impossible la preuve expérimentale de la théorie.

9.2 Problèmes liés à l'expérimentation

La théorie de Kaluza-Klein indique qu'il existe une "tour de particules"³⁸ infinie où chacune des particules est associée à un diviseur de la circonférence de la dimension circulaire. Il est très complexe de prouver cette théorie puisque nous ne sommes pas en mesure de produire même la plus légère de ces particules. De plus, le rayon de la dimension est si petit qu'il est pratiquement impossible d'aller observer à cette échelle.³⁹ Évidemment, la théorie a évolué beaucoup depuis les prédictions de Kaluza et de Klein et a inspiré de fructueuses théories. Par contre, aucune expérience n'a réussi à prouver l'existence de la cinquième dimension telle que prédite par Kaluza-Klein.

Pour arriver à prouver cette théorie, il faudrait être en mesure de détecter les champs prédits ou les particules anticipées. Plusieurs expériences ont été élaborées mais n'ont pas été réalisées par manque de moyens technologiques et physiques. On a par exemple élaboré des techniques ayant pour but de détecter des résonances de Kaluza-Klein. Pour y arriver, on pense à coupler des masses ayant une telle résonance avec un top quark pour recréer les



FIGURE 5 – LHC, Source de l'image :

<http://elaeti.fr/2012/04/lhc-the-lord-of-the-rings/>

résonances de Kaluza-Klein. Plusieurs publications ont été faites à ce sujet au début des années 2000. Par contre, comme mentionné plus tôt, il est impossible technologiquement parlant d'effectuer ces tests. Le Grand collisionneur de hadrons (LHC) est un accélérateur de particules achevé en 2008 à la frontière de la France et de la Suisse. Il est l'accélérateur le plus puissant jamais

38. Yvan St-Aubin et Luc Vinet *Theoretical Physics at the End of the Twentieth Century*, p.133

39. Stephen Webb, *Out of this world : Colliding Universes, Branes, Strings, and Other Wild ideas of Modern Physics*, page 148

construit sur Terre.⁴⁰ Il a une circonférence de 27 km. Pourtant, il est pratiquement impossible que le Grand collisionneur de hadrons puissent observer les résonances de Kaluza-Klein. On peut évaluer l'énergie qui serait nécessaire pour sonder à une si petite échelle. En effet, rappelons que la grosseur de cette cinquième dimension est de l'ordre de la longueur de Planck. On peut trouver cette énergie E en respectant le principe d'incertitude d'Heisenberg. On obtient une énergie approximative de $E = 10^{15} TeV$. Évidemment, le LHC, ne possède pas une telle force.

En 2012, on confirma l'existence du boson de Higgs au LHC. Pour arriver à un tel résultat, on a élaboré de nouveaux tests expérimentaux qui pourraient éventuellement être utilisés pour détecter d'autres particules. La signature des évènements prédits par la théorie étant déjà établie, il faudrait en détecter les résultats.

40. https://fr.wikipedia.org/wiki/Grand_collisionneur_de_hadrons page consultée le 1er avril 2017

10 La théorie moderne de Kaluza-Klein

Section rédigée par Rébecca Tardif

Avant de contribuer à l'élaboration d'autres théories telles que la théorie des cordes et ses extensions modernes (supercordes, théorie M), la théorie de Kaluza-Klein est quelque peu tombée dans l'oubli. C'est en 1938-1943 qu'Einstein et Bergmann ont repris la théorie de Kaluza-Klein. Ils ont cherché à l'améliorer pour qu'elle permette de produire des "solutions de particules". Pour mieux comprendre l'enroulement de la cinquième dimension, les deux physiciens posèrent comme exemple un espace de deux dimensions enroulées (figure 6).

Dans cet exemple, ils posent x^1 comme étant l'analogue de l'espace-temps en quatre dimensions et la fonction ϕ comme étant :

$$\phi(x^1, x^5) = \sum_n \frac{a_n}{\sqrt{\omega_n}} e^{i(n\frac{x^5}{\lambda_5} - \omega_n x^0)}$$

Si b est petit, cette fonction sera approximativement constante entre les points périodiquement espacés P et P' . Donc, cette fonction peut être considérée comme une fonction de x^1 seulement. C'est une analogie de la 5e dimension de la théorie de Kaluza-Klein, présente mais sans impact sur l'espace-temps. Puisque cette 5e dimension est périodique, une façon d'observer l'impact de celle-ci sur la métrique est de la décomposer en série de Fourier⁴¹ :

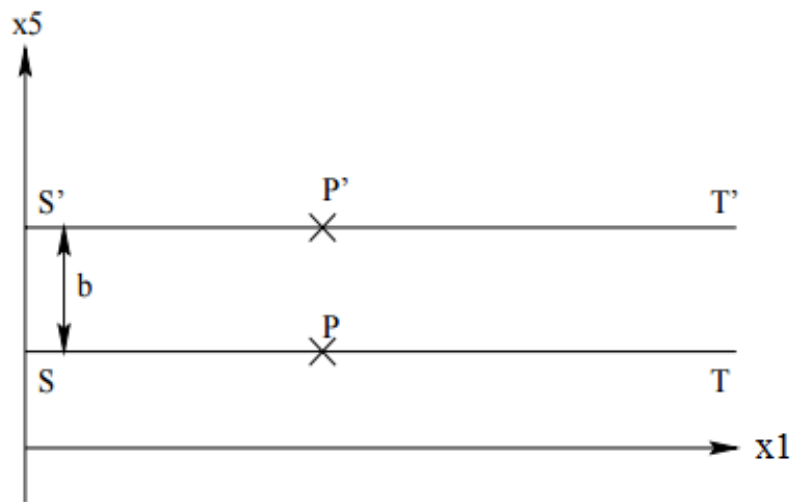


FIGURE 6 – Représentation de la cinquième dimension selon Klein

Source de l'image : <http://cds.cern.ch/record/466266/files/0009087.pdf>

[//cds.cern.ch/record/466266/files/0009087.pdf](http://cds.cern.ch/record/466266/files/0009087.pdf)

$$g_{IJ} = \sum_n g_{nIJ}(x^\mu) e^{in\frac{x^5}{\lambda_5}}$$

Où les coefficients en $n = 0$ sont tout simplement la métrique de Kaluza-Klein. Les termes en $n \neq 0$, assumés petits, sont les termes qui peuvent avoir de la quantité de mouvement dans la 5e dimension, donc qui portent une charge.

41. Van Dongen, Jeroen, *Einstein's Unification*, page 138

Ils proposent les équations de champ suivantes :

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) + \alpha_2 \left(2F_{\mu\alpha} F_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) \\ & + \alpha_3 \left(-2\partial_5 \partial_5 g_{\mu\nu} + 2g^{\alpha\beta} \partial_5 g_{\mu\alpha} \partial_5 g_{\nu\beta} - g^{\alpha\beta} \partial_5 g_{\alpha\beta} \partial_5 g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_5 g^{\alpha\beta} \partial_5 g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \right) \\ & + \alpha_4 g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} (g^{\alpha\beta} \partial_5 g_{\alpha\beta})^2 + 2g^{\alpha\beta} \partial_5 \partial_5 g_{\alpha\beta} + \partial_5 g^{\alpha\beta} \partial_5 g_{\alpha\beta} \right) = 0 \end{aligned}$$

Cette équation correspond à l'équation d'Einstein avec des termes de champ électromagnétique et des termes de matières chargées.

On a également comme seconde équation de champ :

$$\int dx^5 \sqrt{-g} \left(\alpha_1 (g^{\alpha\beta} \partial_5 \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} - g^{\alpha\mu} \partial_5 \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}) - 4\alpha_2 \nabla_{\alpha} F^{\mu\alpha} \right) = 0$$

Cette équation de Maxwell montre que les champs métriques dépendant de x^5 jouent le rôle de sources chargées. Les coefficients α sont des constantes de couplage, qui seront déterminées par Einstein, Bergmann et Bargmann plus tard. Si la dépendance en x^5 est enlevée de ces équations, donc si on applique strictement $\partial_5 g_{IJ} = 0$, on retombe sur les résultats obtenus avec la théorie de Kaluza, et on perd la possibilité d'avoir des particules de matière chargées. Ainsi, cette approche moderne de la théorie de Kaluza-Klein offre une solution à son principal problème.

11 Conclusion

Conclusion rédigée par Rebecca Breton

En conclusion, l'idée de Theodor Kaluza d'ajouter une cinquième dimension complétée par Oscar Klein a mené à une théorie révolutionnaire. La théorie de Kaluza-Klein est la première théorie publiée à avoir repensé la conception de l'univers en quatre dimensions en plus d'être la première théorie d'unification de la gravitation et de l'électromagnétisme. L'ajout d'une cinquième dimension par Kaluza a laissé la porte ouverte à l'ajout de dimensions supplémentaires pour décrire l'univers. La nouvelle interprétation et la nouvelle conceptualisation de la dimension par Klein ont, quant à elles, révolutionné la vision traditionnelle qu'avait les scientifiques de la dimension et a ouvert un monde infini de possibilités. Bien que la théorie présente certains problèmes conceptuels et expérimentaux, on ne peut nier son aspect révolutionnaire. Son influence sur la physique d'aujourd'hui est indéniable puisqu'elle influence toujours des théories très importantes telles les théories des supercordes et la théorie M.

Bibliographie

Sources papier

Nom de Famille, Prénom *Titre*. Ville/Pays : Éditions , Année, Nb de pages

K. Cheng, David. *Field and Wave Electromagnetics*. UK : Pearson New International Edition, Second Edition, 2013, 704 pages

Thidé, Bo. *Electromagnetic Field Theory*, Uppsala, Suède, Upsilon Books, 2004, 187 pages

S. Wesson, Paul. *Five-Dimensional Physics : Classical and Quantum Consequences of Kaluza-Klein Cosmology*. University of Waterloo and Stanford University :World Scientific, 2006, 222 pages

Webb, Stephen. *Out of this world : Colliding Universes, Branes, Strings, and Other Wild ideas of Modern Physics*. New York : Copernicus Books, 2004, 313 pages

Schutz , Bernard, *A First Course in GENERAL RELATIVITY*. Cambridge : Cambridge university press , 2009, 393 pages.

Greene, Brian, *L'Univers élégant*. Paris/France : Éditions Robert Laffont, 2000, 656 pages.

D Lawrie, Ian, *A Unified Grand Tour of Theoretical Physics*. Bristol and Philadelphia : Institute of Physics Publishing , 2002, 564 pages.

Van Dongen, Jeroen, *Einstein's Unification*. Cambridge : Cambridge university press , 2010, 213 pages.

Saint-Aubain, Y. et Vinet, L. *Theoretical Physics at the End of the Twentieth Century*, Banff : Springer, 2002, 637 pages

Sources électroniques

Maxwell's equations, Wikipedia, (Mise à jour : 3 avril 2017) : page consultée le 3 avril 2017.
https://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell's_equations

Expérience de Michelson-Morley, Wikipedia (Mise à jour 13 octobre 2016) : page consultée le 28 mars 2017. https://fr.wikipedia.org/wiki/Exp%C3%A9rience_de_Michelson-Morley

Errede, Steven. *Lecture 19*, Université de l'Illinois à Urbana-Champaign (Automne 2015) : page consultée le 28 mars 2017. http://web.hep.uiuc.edu/home/serrede/P436/Lecture_Notes/P436_Lect_19.pdf

Fleckenstein, Holger. *The Electromagnetic Field Tensor (L&L method)*, Université d'État de New York à Stony Brook (Automne 2001) : page consultée le 29 mars 2017. http://insti.physics.sunysb.edu/itp/lectures/01-Fall/PHY505/06a/Lecture-Notes_HF.pdf

Morreggia, Sylvain. *Electromagnétisme Chap.4-Analogies entre champ électrique et champ gravitationnel*, Hautfort, (2014) : page consultée le 29 mars 2017. <http://physiquepcsimoreggia.hautetfort.com/media/00/01/1788462238.pdf>

Théodor Kaluza, Wikipédia (Mise à jour : 3 mars 2016) : page consulté le 29 mars 2017. https://fr.wikipedia.org/wiki/Theodor_Kaluza

Kaluza-Klein theory, Wikipedia (Mise à jour : 17 mars 2017) : page consultée le 29 mars 2017. https://en.wikipedia.org/wiki/Kaluza%E2%80%93Klein_theory

Twibell, Alexia. *Kaluza Klein Theory*(Publié le 9 octobre 2016) : page consultée le 29 mars 2017. <https://www.youtube.com/watch?v=HUTo-dLTc78>

Géodésique, Wikipédia (Mise à jour : 13 juillet 2016) : page consultée le 29 mars 2017. <https://fr.wikipedia.org/wiki/G%C3%A9od%C3%A9sique>

Gegenberg, J. et Kunstatter, G. *The motion of charged particles in Kaluza-Klein space-time*, York University et University of Toronto : Physics Letters, Volume 106A, numéro 9, 1984, pages 410 à 414. <http://documentslide.com/documents/the-motion-of-charged-particles-in-kaluza-klein-space-time.html>

Miller, Jonah. *Stuff From Shape — Kaluza-Klein Theory*, The Physics Mill , (2013), page consultée le 29 mars 2017, <http://www.thephysicsmill.com/2013/04/28/stuff-from-shape-kaluza-klein-theory/>

Le Bellac, Michel. *Relativité générale pour débutants* , HAL archives-ouvertes.fr , (12 septembre

2006) : page consultée le 27 mars 2017. <https://hal.archives-ouvertes.fr/cel-00092961/document>

Introduction to general relativity, Wikipédia (Mise à jour : 17 mars 2017) : page consultée le 26 mars 2017. https://en.wikipedia.org/wiki/Introduction_to_general_relativity

Van Dongen, Jeroen, *Einstein and the Kaluza-Klein particle*, Institute for Theoretical Physics, University of Amsterdam : page consultée le 30 mars 2017. <http://cds.cern.ch/record/466266/files/0009087.pdf>

Relativity, Cosmology, and Time, : page consultée le 30 mars 2017. <https://universe-review.ca/R15-17-relativity14.htm>

O’Raifeartaigh , L. et Straumann, N. *Early History of Gauge Theories and Kaluza-Klein Theories, with a Glance at Recent Developments*, (Avril 1999), Dublin Institute for Advanced Studies et Institut für Theoretische Physik der Universität Zürich–Irchel, page consultée le 30 mars 2017 <https://arxiv.org/pdf/hep-ph/9810524.pdf>

Grand Collisionneur de Hadrons, Wikipédia (mise à jour : 22 février 2017) : page consultée le 1er avril 2017, https://fr.wikipedia.org/wiki/Grand_collisionneur_de_hadrons

O. Straub, William *Kaluza-Klein for Kids*, Pasadena, California : (Publié le 27 Juin 2014), page consultée le 3 avril 2017, <http://vixra.org/pdf/1406.0172v2.pdf> .