La chromodynamique quantique (QCD : Quantum Chromodynamics), partie intégrante du Modèle Standard des particules élémentaires et de leurs interactions (Standard Model), est la théorie qui permet de décrire l'interaction forte. Elle est construite similairement à l'Électrodynamique Quantique (QED : Quantum Electrodynamics) en construisant un Lagrangien invariant sous une transformation globale d'un groupe de symétrie particulier et répondant au principe d'invariance de jauge. Avant de construire ce Lagrangien nous motiverons le choix du groupe de symétrie $SU(3)$ pour décrire l'interaction forte et étudierons brièvement le modèle des quarks. Puis nous nous attarderons à la théorie de la chromodynamique quantique sur réseau.

1 Le modèle des Quarks

Les centaines de particules découvertes à ce jour dans les différents accélérateurs et dans le rayonnement cosmique ont mené à la recherche d'une structure sous-jacente qui permettrait d'expliquer leur diversité. Ces recherches ont abouti au modèle des quarks, particules élémentaires de spin $\pm 1/2$ et de charge électrique fractionnaire, qui permet de générer l'entièreté du spectre des hadrons observés à ce jour. Les six quarks nécessaires sont listés au tableau 1 ainsi que leurs propriétés respectives. Ces différents quarks (q), ainsi que leurs antiparticules ($\bar{q}$), se combinent entre eux d'une part en groupes de trois pour générer les baryons (qqq) et antibaryons ($\bar{q}\bar{q}\bar{q}$) listés au tableau 2 ; d'autre part, en groupes de deux pour générer les mésons ($q\bar{q}$), listés au tableau 3.

Quarks		
Saveur	Masse en GeV/c^2	Charge électrique
u up	0.003	2/3
d down	0.006	-1/3
c charmé	1.3	2/3
s étrange	0.1	-1/3
t top	175	2/3
b bottom	4.3	-1/3

TAB. 1 – Les six quarks et leurs caractéristiques

Cependant, ce simpliste modèle phénoménologique des quarks en arrive à des contradictions : certains de ses constituants doivent obéir à la fois à

Baryons qqq et anti-baryons $\bar{q}\bar{q}\bar{q}$					
Symbole	Nom	Composition	Charge électrique	Masse en GeV/c^2	Spin
p	proton	uud	1	0.938	1/2
$\bar{p}$	anti-proton	$\bar{u}\bar{u}\bar{d}$	-1	0.938	1/2
n	neutron	udd	0	0.940	1/2
Λ	lambda	uds	0	1.116	1/2
Ω^-	omega	sss	-1	1.672	3/2

Tab. 2 – Cinq des quelques 120 types de baryons et leurs caractéristiques

Mésons $q\bar{q}$					
Symbole	Nom	Composition	Charge électrique	Masse en GeV/c^2	Spin
π^+	pion	$u\bar{d}$	1	0.140	0
K^-	kaon	$s\bar{u}$	-1	0.494	0
ρ^+	rho	$u\bar{d}$	1	0.770	1
B^0	B-zero	$d\bar{b}$	0	5.279	0
η_c	eta-c	$c\bar{c}$	0	2.980	0

Tab. 3 – Cinq des quelques 140 types de mésons et leurs caractéristiques

la statistique de Fermi-Dirac et de Bose-Einstein. Il faut alors introduire un nouveau nombre quantique α dénommé la couleur. En introduisant ce nombre, qui peut prendre 3 valeurs ($\alpha = 1, 2, 3$; ou plus poétiquement rouge, jaune et violet), on peut réinterpréter les fonctions d'onde de certaines particules comme étant asymétriques de manière à laisser le champ libre à la statistique de Fermi-Dirac.

De plus, en se fiant aux résultats expérimentaux, un impératif nommé *l'hypothèse du confinement* devient nécessaire. En effet, jamais la couleur n'a été observée. On doit donc requérir que tous les états liés observables de quarks soient sans couleur (ou de « couleur » blanche). Ceci implique évidemment que l'observation d'un quark isolé est impossible puisque ce dernier est le porteur d'une charge de couleur.

Pour Q.E.D, l'expérience montre que la force de couplage est forte pour les quantités de mouvement élevées et devient faible pour des quantités de mouvement faibles. Cependant, les expériences SLAC-MIT sur la diffusion des électrons par des protons ($e^-p \rightarrow e^-p$) amènent Bjorken et Feynman à énoncer le modèle simple des partons, qui assume simplement que le proton est un assemblage faiblement lié de petites particules. Ces particules sont dénommées les partons et comprennent les quarks, antiquarks et potentiellement tout ce qui pourrait également se retrouver à l'intérieur d'un proton. Ce modèle amène Bjorken à énoncer, que peu importe l'angle de déviation de l'électron, donc l'énergie du photon d'interaction, la structure du proton reste apparemment identique. Cette conclusion permet de supposer un comportement dénommé *liberté asymptotique* : la constante de couplage de l'interaction forte, à l'inverse de celle de l'interaction électromagnétique, est faible pour les quantités de mouvement élévées ou les laps de temps courts et devient forte pour des quantités de mouvement faibles ou les laps de temps longs. Les quarks sont donc liés par une force faible à courte distance, mais qui augmente en fonction de la distance, ce qui est compatible avec l'hypothèse du confinement.

2 Le choix d'un groupe de Lie

Ces considérations sur la nature des quarks nous amènent maintenant à choisir un groupe de Lie, qui agira comme groupe de transformation à l'intérieur de notre théorie de champs quantiques de l'interaction forte. Les conditions qu'il doit respecter sont résumées ici :

1 - La couleur doit être une symétrie exacte.

2 - Il y a trois couleurs possible : $\alpha = 1, 2, 3$.

3 - Les antiquarks sont différent des quarks, se qui implique que $q* \neq \bar{q}$.

4 - Les quarks se conforme à l'hypothèse du confinement.

5 - L'interaction forte se comporte conformément à la liberté asymptotique.

Seulement deux groupes de Lie non isomorphique entre eux ont une représentation tridimensionnelle irréductible : $SU(3)$ et $SO(3)$. Or, $SO(3)$ est un groupe réel alors que la condition no.3 implique des matrices de transformation complexes. Le seul candidat acceptable parmi les groupes non abéliens reste donc $SU(3)$. Il est à noter que Gell-Mann et Ne'eman avaient déjà montré que les particules élémentaires remplissaient des représentations irréductibles de ce groupe de symétrie.

À cette symétrie est associée une invariance des lois de la physique sous une transformation globale non abélienne :

$$\psi' = \exp(i\alpha_i \cdot \lambda/2)\psi \tag{1}$$

dans laquelle $\alpha_i(i = 1, 2, 3, ..., 8)$ sont les paramètres de la matrice $SU(3)$. En suivant le principe d'invariance de jauge, on peut alors postuler que les interactions des quarks sous soumises à une invariance de jauge locale sous $SU(3)$.

3 Le Lagrangien de QCD

Il faut maintenant construire un Lagrangien qui correspond à ce modèle. Commençons par écrire le L_q, le Lagrangien qui décrit la propagation libre des quarks :

$$L_q(x) = \sum_{q=u,d,s,c,t,b} \left(\sum_{c=1,2,3} \bar{\psi}_{qk}(x)(i\partial_u \gamma^u - m_q)\psi_q^k(x) \right) \tag{2}$$

Or, ce Lagrangien n'est pas invariant sous l'action d'une transformation de jauge appartenant à $SU(3)$, telle que

$$\psi_q^i(x) \rightarrow \psi\prime_q^i(x) = U_k^i(x)\psi_q^k(x) \tag{3}$$

dans laquelle la matrice de transformation $U_k^i(x)$ correspond à :

$$U_k^i(x) = \exp\left[-i \sum_{a=1}^{8} \chi^a(x) \frac{(\lambda^a)_k^i}{2}\right] \tag{4}$$

Les $\lambda^a(a = 1, 2, 3..., 8)$ correspondent ici aux huit matrices de Gell-Man, génératrice du groupe $SU(3)$. Il faut donc ajouter un terme compensateur qui va annuler l'apparition du terme en $\partial\chi^a(x)$ lors de l'application d'une transformation :

$$L_q(x) \rightarrow L_q(x) + \sum_{q=u,d,...} \bar{\psi}_{qi}(x) \left[iU_k^{\dagger i}(x)\partial_\mu U_j^k(x)\right] \gamma^\mu \psi_q^j(x) \tag{5}$$

Pour que le Lagrangien respecte l'invariance de jauge, il faut introduire, suivant les idées avancées par Yang-Mills, huit champs de spin-1 interagissant avec les champs de quarks correspondant aux huit matrices de Gell-Mann. Les médiateurs d'interaction seront donc huit particules similaires au photon (le médiateur de l'interaction dans QED) : les gluons. On doit donc ajouter un terme d'interaction quark-gluon au Lagrangien

$$L_q(x) = \sum_{q=u,d,s,c,t,b} \left(g_s \bar{\psi}_{qi}(x) \frac{(\lambda^a)^i_k}{2} \gamma^\mu \psi^k_q(x) A^a_\mu(x) \sum_{c=1,2,3} \bar{\psi}_{qk}(x)(i\partial_u \gamma^u - m_q)\psi^k_q(x) \right) \tag{6}$$

dans lequel g_s est la constante de couplage analogue à e dans QED. Ce second terme est également invariant sous une transformation faisant intervenir $SU(3)$.Cependant, contrairement à ce qui se passe avec les photons dans QED, les gluons qui sont les médiateurs de l'interaction, interagissent entre eux, et on doit en tenir compte en ajoutant un troisième et dernier terme également invariant sous $SU(3)$:L_{gluons} à notre Lagrangien :

$$L_{gluons}(x) = -\frac{1}{4} G^a_{\mu v}(x) G^{a\mu v}(x), \tag{7}$$

où :

$$G^a_{\mu v} = \partial_\mu A^a_v - \partial_v A^a_\mu + g_s f^{abc} A^b_\mu A^c_v \tag{8}$$

Pour en arriver au Lagrangien complet :

$$L_{QCD} = \sum_{q=u,d,s,c,t,b} \left(g_s \bar{\psi}_{qi}(x) \frac{(\lambda^a)^i_k}{2} \gamma^\mu \psi^k_q(x) A^a_\mu(x) \sum_{c=1,2,3} \bar{\psi}_{qk}(x)(i\partial_u \gamma^u - m_q)\psi^k_q(x) \right) - \frac{1}{4} G^a_{\mu v}(x) G^{a\mu v}(x) \tag{9}$$

On peut maintenant être certain que ce Lagrangien $\mathcal{L}_{\mathcal{QCD}}$ reste invariant sous une transformation appartenant au groupe $SU(3)_c$. On peut maintenant, grâce à ce Lagrangien, calculer les vertex et les propagateurs des quarks et des gluons, ceux-ci sont regroupés au tableau 4.

Propagateur du quartz	$\langle 0 \vert T\{\psi^i_q(x)\bar{\psi}_{qk}(0)\}\vert 0\rangle = i\delta^i_k \int d^4p \left(\frac{p_\alpha \gamma^\alpha + m_q}{p^2 - m^2_q}\right) e^{-ipx}$
Propagateur du gluon	$\langle 0 \vert T\{A^a_\mu(x) A^b_v(0)\}\vert 0\rangle = -i\delta^{ab} \int d^4k \frac{g_{\mu v}}{k^2} e^{ikx}$
Vertex quark-gluon	$g_s \bar{\psi}_q(x)\gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} \psi_q(x) A^{a\mu}(x)$
Vertex 3-gluons	$-\frac{g_s}{2} f^{abc} \left[\partial_\mu A^a_v(x) - \partial_v A^a_\mu(x)\right] A^{b\mu}(x) A^{cv}(x)$
Vertex 4-gluons	$-\frac{g^2_s}{2} f^{abc} f_{ade} A^b_\mu(x) A^c_v(x) A^{d\mu}(x) A^{ev}(x)$

TAB. 4 – Les vertex et les propagateurs dans QCD

Ces propagateurs et ces vertex peuvent maintenant nous servir à construire des diagrammes de Feynman. Nous avons cependant besoin de déterminer auparavant la constante de couplage entre les gluons et les quarks.

$$\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi} \tag{10}$$

4 La constante de couplage α

Un problème survient cependant : pour calculer la constante de couplage nous devons avant renormaliser notre théorie de champs non abélienne, ce qui cause un problème. En effet, des boucles fermées d'interaction de gluons causent des problèmes de divergence. Le calcul de ce groupe de renormalisation dépasse largement la portée de ce travail, cependant le résultat en est connu.

On obtient la constante de couplage effective au premier ordre :

$$\alpha_s^{eff}(Q) \equiv \alpha - s \left[1 - \frac{\alpha_s}{4\pi}\left(\beta_0 \log\frac{Q^2}{\mu^2} + cte\right)\right] \tag{11}$$

En calculant cette constante à une autre échelle $Q = Q_0$, et en prenant le rapport $\alpha(Q)/\alpha(Q_0)$, on obtient après l'application d'un groupe de renormalisation la constante de « running coupling» :

$$\alpha_s(Q) = \frac{\alpha_s(Q_0)}{1 + \frac{\alpha_s(Q_0)}{4\pi}\beta_0 \log\frac{Q^2}{Q_0^2}} \tag{12}$$

L'analyse de la structure de l'équation 12 nous permet de trouver un régime où la constante α_s sera suffisamment petite pour qu'il soit possible de faire des calculs grâce à QCD en utilisant la théorie des perturbations qui requiert que $\alpha \ll 1$. De plus, on remarque que ces résultats ne seront valides que dans la limite d'énergie considérée qui est délimitée par Q_0.

On peut calculer la constante de couplage à des ordres supérieurs, ce qui est important à l'intérieur de QCD étant donné la force de la constante de couplage aux énergies intéressantes. On obtient alors :

$$\alpha_s(\mu^2) = \alpha_s(\mu_0^2)\left(1 - \frac{\beta_1\alpha_s(\mu_0^2)}{2\pi}\ln\left(\mu^2/\mu_0^2\right) - \frac{\beta_2\alpha_s^2(\mu_0^4)}{2\pi^2}\ln\left(\mu^2/\mu_0^2\right) + ...\right) \tag{13}$$

Ces formules de détermination de la constante de couplage nous permettent de vérifier facilement que lorsque μ augmente, la constante de couplage diminue, ce qui amène à confirmer notre hypothèse de liberté asymptotique. En ce qui concerne l'hypothèse du confinement des quarks, le développement actuel de la théorie ne permet pas de la démontrer formellement. Cependant, des calculs perturbatifs poussés, basés sur la théorie de QCD, sur réseau la supportent.

5 QCD sur réseau

À de grandes distances (c'est à dire à de faibles échelles), il devient impossible d'utiliser la théorie pertubative pour parvenir à des résultats. En effet, les interactions entre les quarks et les gluons sont trop fortes et l'approche perturbative ne peut fonctionner. Cependant, Wilson, en 1974, propose la théorie de jauge sur réseau (Latice Gauge Theory) qui utilise l'intégrale de chemin de Feynman.

Son utilisation dans le cadre de QCD mène à la chromodynamique quantique sur réseau (LQCD : Lattice Quantum Chromodynamique). Cette approximation correspond à la formulation de QCD sur une grille d'espace-temps discrétisé. Les seuls paramètres fixés expérimentalement par la théorie sont la force de la constante de couplage et la masse de cinq des six quarks (le quark top est ignoré étant donné sa durée de vie trop courte).

La méthode utilisée est la suivante : après avoir discétisé l'espace-temps, on pose la fonction de partition dans cet espace :

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-S} \tag{14}$$

$$S = \int d^4x (1/4 F_{\mu v} F^{\mu v} - \bar{\psi} M \psi) \tag{15}$$

Dans laquelle S est l'action de QCD et M est l'opérateur de Dirac. En effectuant l'intégration, on obtient :

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu \det M e^{\int d^4x (1/4 F_{\mu v} F^{\mu v})} \tag{16}$$

Cette représentation analytique permet de laisser toute la contribution fermionique dans le terme global $\det M$. On peut alors utiliser une approche approximative qui consiste à fixer M =constante, ce qui revient à ne pas tenir compte de l'effet de la polarisation du vide sur les boucles de quarks.

On peut alors calculer les observables redéfinie en terme de propagateurs de quarks :

$$\langle \mathcal{O}|\rangle = \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}A_{\mu}\mathcal{O}e^{-S} \quad (17)$$

Cependant $< \mathcal{O} >$ est simplement une moyenne des fonctions de corrélation évaluées statistiquement sur un grand nombre des valeurs du champ fermionique et gluonique en chaque point du réseau. Ce calcul se doit d'être statistique étant donné que ces champs sont continus en chaque noeud du réseau discrétisé et il est effectué grâce à des simulations de type Monte-Carlo.

6 Résumé

La chromodynamique quantique reste une théorie dont la capacité de résoudre des problèmes est très limitée, du moins dans le domaine énergétique que les grands accélérateurs comptemporains nous permettent de sonder. En effet, le domaine d'action de l'approche perturbative est limité au cas dans lequel la constante de couplage est faible. À l'intérieur de QCD, cette plage d'énergie correspond, contrairement à QED, à un état dans lequel les quarks sont près les uns des autres. Or, les accélérateurs comptemporains ne permettent que d'observer les états dans lesquels les quarks sont éloignés les uns des autres.

Certaines prédictions peuvent être faites dans cette plage d'énergie grâce à la chromodynamique quantique sur réseau, mais il s'agit d'un domaine d'étude encore jeune faisant appel à de nombreuses approximations. Ce processus est de plus très intensif en calcul informatisé et est présentement limité par la puissance des ordinateurs disponibles.

Il est donc très difficile de mettre à l'épreuve la chromodynamique quantique. Cependant son pouvoir d'explication qualitatif et/ou approximatif des phénomènes tel le confinement des quarks, et la liberté asymptotique tend à confirmer cette théorie.