Aide-mémoire — Physique mathématique II (PHY-1002)

Nombres complexes ($z, z^* \in \mathbb{C}$, $x, y, r, \theta \in \mathbb{R}$)

		$z, z^* \in \mathbb{C}$	Cartésienne	Polaire
C1	Nombre complexe	z	$x+iy$	$re^{i\theta}$
C2	Conjugué	z^*	$x-iy$	$re^{-i\theta}$
C3	Module	$\lvert z\rvert=\sqrt{zz^*}$	$\sqrt{x^2+y^2}$	r
C4	Argument	$\arg z$	$\arctan(y/x)$	θ
C5	Partie réelle	$\operatorname{Re} z$	x	$r\cos\theta$
C6	Partie imaginaire	$\operatorname{Im} z$	y	$r\sin\theta$

C11	de Moivre	$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$
C12	Euler	$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$
C13	Cauchy-Riemann	$u_x=v_y$ et $u_y=-v_x$ ou $u_r=v_\theta/r$ et $v_r=-u_\theta/r$
C14	Dérivée	$f'=u_x+iv_x=v_y-iu_y$ $=u_x-iu_y=v_y+iv_x$
C15	Trigo.	$\cos\theta$ (ou $i\sin\theta$) $=\left(e^{i\theta}\pm e^{-i\theta}\right)/2$
C16	Hyper.	$\cosh x$ (ou $\sinh x$) $=\left(e^{x}\pm e^{-x}\right)/2$

Séries de Fourier (SdF) ($f(x)$: fonction de période L avec $k=2\pi/L$)

	SdF sinus/cosinus	
S1	$f_F(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(nkx)+b_n\sin(nkx)]$	où
S2	$a_n=\frac{2}{L}\int_{x_0}^{x_0+L}f(x)\cos(nkx)\,dx$	$n\in\mathbb{N}$
S3	$b_n=\frac{2}{L}\int_{x_0}^{x_0+L}f(x)\sin(nkx)\,dx$	$n\in\mathbb{N}^*$

	SdF complexe	
S11	$f_F(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\exp(inkx)$	
S12	où $c_n=\frac{1}{L}\int_{x_0}^{x_0+L}f(x)\exp(-inkx)dx$	$n\in\mathbb{Z}$
S13	ou $c_{\pm n}=\frac{1}{2}(a_n\mp ib_n)$	$n\in\mathbb{N}$

Transformées de Fourier (TdF)

	$f(t)$	$\tilde{f}(\omega)=\mathcal{F}[f(t)](\omega)$
F1	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$
F2	$\alpha f(t)+\beta g(t)$	$\alpha\tilde{f}(\omega)+\beta\tilde{g}(\omega)$
F3	$f^{(n)}(t)$	$(i\omega)^n\tilde{f}(\omega)$
F4	$(it)^n f(t)$	$\tilde{f}^{(n)}(\omega)$
F5	$\int^t f(s)ds$	$\frac{1}{i\omega}\tilde{f}(\omega)+2\pi c\delta(\omega)$
F6	$f(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}\tilde{f}(\frac{\omega}{a})$
F7	$f(t+a)$	$e^{ia\omega}\tilde{f}(\omega)$
F8	$e^{i\omega_0 t}f(t)$	$\tilde{f}(\omega-\omega_0)$
F9	$e^{\alpha t}f(t)$	$\tilde{f}(\omega+i\alpha)$
F10	$f^*(t)$	$\tilde{f}^*(-\omega)$
F11	$\tilde{f}(t)$	$f(-\omega)$
F12	$(f*g)(t)$	$\sqrt{2\pi}\tilde{f}(\omega)\tilde{g}(\omega)$
F13	$f(t)\,g(t)$	$\sqrt{2\pi}\left(\tilde{f}*\tilde{g}\right)(\omega)$
F14	$(f\otimes g)(t)$	$\sqrt{2\pi}[\tilde{f}(\omega)]^*\tilde{g}(\omega)$
F15	$f^*(x)g(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\tilde{f}\otimes\tilde{g}$

	$f(t)$	$\mathcal{F}[f(t)](\omega)$
F21	A	$\sqrt{2\pi}A\delta(\omega-a)$
F22	$\delta(t-a)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega(t-a)}d\omega$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
F23	$H(t)=\begin{cases}1 & \text{si } t>0\\ 0 & \text{si } t<0.\end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\pi\delta(\omega)+\frac{1}{i\omega}\right)$
F24	$H(t-a)-H(t+a)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2\sin a\omega}{\omega}$
F25	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2\sin at}{t}$	$H(\omega-a)-H(\omega+a)$
F26	$\operatorname{sgn}(t)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{i\omega}$
F27	$\delta(t-b)+\delta(t+b)$	$\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\cos(b\omega)$
F28	$\frac{A}{\lvert\tau\rvert\sqrt{2\pi}}\exp(-t^2/(2\tau^2))$	$\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\tau^2\omega^2/2)$
F29	$\frac{a}{\pi}\frac{1}{t^2+a^2}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-a\lvert\omega\rvert}$, $a>0$
F30	$Ae^{-at}H(t)$	$\frac{A}{\sqrt{2\pi}(a+i\omega)}$, $a>0$
F31	e^{-iat}	$\sqrt{2\pi}(\delta(\omega-a))$
F32	$\cos(at)H(t)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\delta(\omega+a)+\delta(\omega-a))$
F33	$\sin(at)H(t)$	$i\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\delta(\omega+a)+\delta(\omega-a))$

Transformées de Laplace (TdL)

	$f(t)$	$\overline{f}(s)=\mathcal{L}[f(t)](s)$
L1	$\frac{1}{2\pi i}\lim_{T\to\infty}\int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT}\overline{f}(s)e^{st}ds$	$\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$
L2	$\alpha f(t)+\beta g(t)$	$\alpha\overline{f}(s)+\beta\overline{g}(s)$
L3	$f^{(n)}(t)$	$s^n\overline{f}(s)-\sum_{k=1}^{n}s^{n-k}f^{(k-1)}(0)$
L4	$(-t)^n f(t)$	$\overline{f}^{(n)}(s)$
L5	$\int_0^t f(u)du=(f*H)(t)$	$\frac{1}{s}\overline{f}(s)$
L6	$\frac{1}{t}f(t)$	$\int_s^\infty\overline{f}(u)du$
L7	$f(at)$	$\frac{1}{a}\overline{f}(\frac{s}{a})$
L8	$\frac{1}{a}f(at)$	$\overline{f}(as)$
L9	$f(t-a)H(t-a)$	$e^{-as}\overline{f}(s)$
L10	$e^{at}f(t)$	$\overline{f}(s-a)$
L11	$f(t)=f(t+T)$	$\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(t)e^{-st}dt$
L12	$e^{at}f(t)$	$\overline{f}(s-a)$
L13	$(f*g)(t)=\int_0^t f(u)g(t-u)du$	$\overline{f}(s)\overline{g}(s)$
L14	$(f\otimes g)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f^*(x)g(x+z)dx$	$\overline{f}^*(-s^*)\overline{g}(s)$
L15	$f^*(t)$	$\overline{f}(s)\overline{g}$
L16	$\lim_{s\to\infty}\overline{f}(s)=\lim_{s\to\infty}\mathcal{L}[f(t)](s)=0$	
L17	$\lim_{t\to 0}f(t)=\lim_{s\to\infty}s\overline{f}(s)$	$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}s\overline{f}(s)$

	$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)](s)$	s_0
L21	c	c/s	0
L22	$\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}	0
L23	$H(t-t_0)$	$\frac{e^{-st_0}}{s}$	0
L24	$tH(t)$	$\frac{1}{s^2}$	0
L25	$H(t)ct^n$	$\frac{cn!}{s^{n+1}}$	0
L26	$H(t)\sin bt$	$\frac{b}{s^2+b^2}$	0
L27	$H(t)\cos bt$	$\frac{s}{s^2+b^2}$	0
L28	$H(t)e^{at}$	$\frac{1}{s-a}$	a
L29	$H(t)t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	a
L30	$H(t)\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\lvert a\rvert$
L31	$H(t)\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\lvert a\rvert$
L32	$H(t)e^{at}\sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	a
L33	$H(t)e^{at}\cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$	a
L34	$H(t)t^{1/2}$	$\frac{1}{2}(\pi/s^3)^{1/2}$	0
L35	$H(t)t^{-1/2}$	$(\pi/s)^{1/2}$	0

Trigonométrie et intégrales

Trigonométrie/fcn hyperbolique					
R1	$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$	R11	$1+\tan^2\varphi = \sec^2\varphi$	R21	$1+\cot^2\varphi = \csc^2\varphi$
R2	$\sin(\varphi \pm \theta) = \sin\varphi\cos\theta \pm \cos\varphi\sin\theta$	R12	$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$	R22	$2\sin^2(\varphi/2) = 1-\cos\varphi$
R3	$\cos(\varphi \pm \theta) = \cos\varphi\cos\theta \mp \sin\varphi\sin\theta$	R13	$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$	R23	$2\cos^2(\varphi/2) = 1+\cos\varphi$
R4	$d(\sin x)/dx = \cos x$	R14	$d(\cos x)/dx = -\sin x$	R24	$d(\tan x)/dx = \sec^2 x$
R5	$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$	R15	$1-\tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$	R25	$1+\operatorname{csch}^2 x = \coth^2 x$
R6	$\sinh(x\pm y) = \sinh x\cosh y \pm \cosh x\sinh y$	R16	$\sinh 2x = 2\sinh x\cosh x,$	R26	$2\sinh^2(\varphi/2) = \cosh x - 1$
R7	$\cosh(x\pm y) = \cosh x\cosh y \pm \sinh x\sinh y$	R17	$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$	R27	$2\cosh^2(\varphi/2) = \cosh x + 1$

Intégrales de base	
B1	$\int u\,dv = uv - \int v\,du$
B2	$\int u^n\,du = \dfrac{1}{n+1}u^{n+1} + C,\ n \neq -1$
B3	$\int \dfrac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$
B4	$\int e^u\,du = e^u + C$
B5	$\int a^u\,du = \dfrac{1}{\ln a}a^u + C$
B6	$\int \sin u\,du = -\cos u + C$
B7	$\int \cos u\,du = \sin u + C$
B8	$\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$
B9	$\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$
B10	$\int \sec u\tan u\,du = \sec u + C$
B11	$\int \csc u\cot u\,du = -\csc u + C$
B12	$\int \tan u\,du = \ln\lvert\sec u\rvert + C$
B13	$\int \cot u\,du = \ln\lvert\sin u\rvert + C$
B14	$\int \sec u\,du = \ln\lvert\sec u + \tan u\rvert + C$
B15	$\int \csc u\,du = \ln\lvert\csc u - \cot u\rvert + C$
B16	$\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}\dfrac{u}{a} + C$
B17	$\int \dfrac{du}{a^2+u^2} = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{u}{a} + C$
B18	$\int \dfrac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \dfrac{1}{a}\sec^{-1}\dfrac{u}{a} + C$
B19	$\int \dfrac{du}{a^2-u^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{u+a}{u-a}\right\rvert + C$
B20	$\int \dfrac{du}{u^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{u-a}{u+a}\right\rvert + C$

Int. avec fcn. trigonométrique	
T1	$\int \sin^2 u\,du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\sin 2u + C$
T2	$\int \cos^2 u\,du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin 2u + C$
T3	$\int \tan^2 u\,du = \tan u - u + C$
T3	$\int \cot^2 u\,du = -\cot u - u + C$
T4	$\int \sin^3 u\,du = -\frac{1}{3}(2+\sin^2 u)\cos u + C$
T5	$\int \cos^3 u\,du = \frac{1}{3}(2+\cos^2 u)\sin u + C$
T6	$\int \tan^3 u\,du = \frac{1}{2}\tan^2 u + \ln\lvert\cos u\rvert + C$
T7	$\int \cot^3 u\,du = -\frac{1}{2}\cot^2 u - \ln\lvert\sin u\rvert + C$
T8	$\int \sec^3 u\,du = \frac{1}{2}\sec u\tan u + \frac{1}{2}\ln\lvert\sec u + \tan u\rvert + C$
T9	$\int \csc^3 u\,du = -\frac{1}{2}\csc u\cot u + \frac{1}{2}\ln\lvert\csc u - \cot u\rvert + C$
T10	$n\int \sin^n u\,du = -\sin^{n-1}u\cos u + (n-1)\int \sin^{n-2}u\,du$
T11	$n\int \cos^n u\,du = \cos^{n-1}u\sin u + (n-1)\int \cos^{n-2}u\,du$
T12	$(n-1)\int \tan^n u\,du = \tan^{n-1}u - (n-1)\int \tan^{n-2}u\,du$
T13	$(n-1)\int \cot^n u\,du = -\cot^{n-1}u - (n-1)\int \cot^{n-2}u\,du$
T14	$(n-1)\int \sec^n u\,du = \tan u\sec^{n-2}u + (n-2)\int \sec^{n-2}u\,du$
T15	$(n-1)\int \csc^n u\,du = -\cot u\csc^{n-2}u + (n-2)\int \csc^{n-2}u\,du$
T16	$\int \sin au\sin bu\,du = \dfrac{\sin(a-b)u}{2(a-b)} - \dfrac{\sin(a+b)u}{2(a+b)} + C$
T17	$\int \cos au\cos bu\,du = \dfrac{\sin(a-b)u}{2(a-b)} + \dfrac{\sin(a+b)u}{2(a+b)} + C$
T18	$\int \sin au\cos bu\,du = -\dfrac{\cos(a-b)u}{2(a-b)} - \dfrac{\cos(a+b)u}{2(a+b)} + C$
T19	$\int u\sin u\,du = \sin u - u\cos u + C \quad \int u\cos u\,du = \cos u + u\sin u + C$
T20	$\int u^n\sin u\,du = -u^n\cos u + n\int u^{n-1}\cos u\,du$
T21	$\int u^n\cos u\,du = u^n\sin u - n\int u^{n-1}\sin u\,du$

Int. avec fcn. exponentielle et logarithmique	
E1	$\int ue^{au}\,du = \dfrac{1}{a^2}(au-1)e^{au} + C$
E2	$\int u^n e^{au}\,du = \dfrac{1}{a}u^n e^{au} - \dfrac{n}{a}\int u^{n-1}e^{au}\,du$
E3	$\int e^{au}\sin bu\,du = \left(a^2+b^2\right)^{-1}e^{au}(a\sin bu - b\cos bu) + C$
E4	$\int e^{au}\cos bu\,du = \left(a^2+b^2\right)^{-1}e^{au}(a\cos bu + b\sin bu) + C$
E5	$\int \ln u\,du = u\ln u - u + C$
E6	$\int u^n\ln u\,du = (n+1)^{-2}u^{n+1}\left[(n+1)\ln u - 1\right] + C$
E7	$\int \dfrac{1}{u\ln u}\,du = \ln\lvert\ln u\rvert + C$

Int. avec fcn. hyperbolique	
H1	$\int \sinh u\,du = \cosh u + C$
H2	$\int \cosh u\,du = \sinh u + C$
H3	$\int \tanh u\,du = \ln\cosh u + C$
H4	$\int \coth u\,du = \ln\lvert\sinh u\rvert + C$
H5	$\int \operatorname{sech} u\,du = \tan^{-1}\lvert\sinh u\rvert + C$
H6	$\int \operatorname{csch} u\,du = \ln\left\lvert\tan\frac{1}{2}u\right\rvert + C$
H7	$\int \operatorname{sech}^2 u\,du = \tanh u + C$
H8	$\int \operatorname{csch}^2 u\,du = -\coth u + C$
H9	$\int \operatorname{sech} u\tanh u\,du = -\operatorname{sech} u + C$
H10	$\int \operatorname{csch} u\coth u\,du = -\operatorname{csch} u + C$

Int. avec fcn. trigonométrique inverse $\left(\varphi(u) = \sqrt{1-u^2}\right)$			
I1	$\int \sin^{-1}u\,du = u\sin^{-1}u + \varphi(u) + C$	I6	$2\int u\tan^{-1}u\,du = \left(u^2+1\right)\tan^{-1}u - u + C$
I2	$\int \cos^{-1}u\,du = u\cos^{-1}u - \varphi(u) + C$	I7	$\int (n+1)u^n\sin^{-1}u\,du = u^{n+1}\sin^{-1}u - \int \left(u^{n+1}/\varphi(u)\right)du + C$
I3	$\int 2\tan^{-1}u\,du = 2u\tan^{-1}u - \ln(1+u^2) + C$	I8	$\int (n+1)u^n\cos^{-1}u\,du = u^{n+1}\cos^{-1}u + \int \left(u^{n+1}/\varphi(u)\right)du + C$
I4	$\int 4u\sin^{-1}u\,du = \left(2u^2-1\right)\sin^{-1}u + u\,\varphi(u) + C$	I9	$\int (n+1)u^n\tan^{-1}u\,du = u^{n+1}\tan^{-1}u - \int \left(u^{n+1}/\left(1+u^2\right)\right)du + C$
I5	$\int 4u\cos^{-1}u\,du = \left(2u^2-1\right)\cos^{-1}u - u\,\varphi(u) + C$		

EDO d'ordre 1 : Méthodes de résolution

M1-EDO séparables

1. Forme: $\frac{dy}{dx} = X(x)Y(y)$ ou $X(x)dx + (-1/Y(y))dy = 0$;
2. Réarranger cette équation afin que les termes en x et en y apparaissent des côtés opposés $\frac{1}{Y(y)}dy = X(x)dx$;
3. Intégrer de chaque côté $\int \frac{1}{Y(y)}dy = \int X(x)dx$.

M2-EDO exactes

1. Forme: $M(x,y)dx+N(x,y)dy = 0$ ou $\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ avec $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$; Si l'EDO n'est pas exacte, passer à une autre méthode (voir plus bas);
2. Appproche 1: Intégrer $\partial U/\partial x = M$ p/r à x pour obtenir $U(x,y) = \int Mdx + F(y) = C$ où C est une constante; Dériver $U(x,y)$ p/r à y pour obtenir $\partial F/\partial y$ sachant que $\frac{\partial U}{\partial y} = N$; Intégrer pour obtenir $F(y)$ et l'insérer dans $\int Mdx+F(y) = C \longrightarrow \int Mdx+\int(N-\frac{\partial}{\partial y}\int Mdx)dy = C$ menant donc une expression pour $y(x)$.
3. Appproche 2: Intégrer $\partial U/\partial y = N$ p/r y pour obtenir $U(x,y) = \int Ndy + G(x) = C$ où C est une constante; Dériver $U(x,y)$ p/r à x pour obtenir $\partial G/\partial x$ sachant que $\frac{\partial U}{\partial x} = M$; Intégrer pour obtenir $G(x)$ et l'insérer dans $\int Ndy+G(x) = C \longrightarrow \int Ndy+\int(M-\frac{\partial}{\partial x}\int Ndy)dx = C$ menant donc une expression pour $x(y)$.

M4-EDO inexactes par facteur d'intégration

1. Forme: $M(x,y)dx+N(x,y)dy = 0$ ou $\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ avec $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$;
2. Vérifier si $f(x) = \frac{1}{N}(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x})$ et $g(y) = \frac{1}{M}(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y})$ sont respectivement fonctions de seulement x ou y;
3. Pour une fonction $f(x)$, le facteur d'intégration est $\mu(x) = \exp\{\int f(x)dx\}$ (pour $g(y)$, on a $\mu(y) = \exp\{\int g(y)dy\}$);
4. Si le facteur d'intégration est une fonction de x et y, alors quelquefois il peut être trouvé par inspection ou par essais et erreurs;
5. Dans tous les cas, le facteur d'intégration μ doit satisfaire $\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$;
6. Multiplier l'EDO par $\mu(x)$ pour la rendre exacte et résoudre par la méthode des EDO exactes.

M5-EDO linéaires par facteur d'intégration (= M4)

1. Forme: $a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)dy = f(x)$ ou $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$;
2. Le facteur d'intégration est $\mu(x) = \exp\left[\int P(x)dx\right]$ avec la solution $y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)\, Q(x)dx + c\right]$.

M6-EDO linéaires par variation d'un paramètre

1. Forme: $a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)dy = f(x)$ ou $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$; (homogène $f(x) = 0$, non homogène $f(x) \neq 0$);
2. Écrire la solution homogène $y_h(x) = A\exp\left[-\int P(x)dx\right]$;
3. Laisser le paramètre A varier $A = B(x)$ et le calculer $B(x) = \int \frac{Q(x)}{y_h(x)|_{A=1}}dx + c$;
4. Substituer A par $B(x)$ dans l'EDO homogène pour obtenir $y(x) = B(x)\, y_h(x)|_{A=1}$;
5. Méthode équivalente à **M5** avec $y_h(x)|_{A=1} = 1/\mu(x)$.

Cas spéciaux: Substitutions

S1-EDO isobares

1. Forme $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$;
2. Donner à y et dy le poids m et à x et dx le poids 1;
3. Écrire la somme de puissances dans chaque terme;
4. Déterminer s'il existe une valeur de m pour laquelle ces sommes sont égales;
5. Remplacer $y = vx^m$ dans l'EDO originale afin de la rendre séparable;
6. Intégrer l'équation séparée directement, puis remplacez v par yx^{-m} pour obtenir la solution.

S2-EDO homogènes (dans le sens de "même poids")

1. Forme: $\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$; (cas spécial de **S1** avec $m = 1$)
2. Suivre les étapes 5 et 6 de **S1** en posant $m = 1$.

S3-EDO de Bernoulli

1. Forme $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^\eta$;
2. Faire la substitution $v = y^{1-\eta}$;
3. Cela mène à une équation linéaire en v qui peut être résolue par la méthode du facteur d'intégration;
4. Finalement remplacer v par $y^{1-\eta}$ pour obtenir la solution.

S4-EDO de Riccati

1. Forme $\frac{dy}{dx} = R(x)y^2 + P(x)y + Q(x)$;
2. Trouver par inspection une solution particulière $Y(x)$ en posant $y = Y + \frac{1}{u}$, alors $y' = Y' - u'/u^2$;
3. Substituer cette expression dans l'EDO et utiliser le fait que $Y(x)$ doit être solution de l'EDO i.e. $Y' = RY^2 + PY + Q$;
4. Par élimination on obtient $u' + (2RY + P)\,u = -R$, une EDO linéaire résolue par facteur d'intégration et variation de paramètre;
5. Sachant $u(x)$, on retrouve $y(x)$

S5-Substitution $v = ax + by + c$

1. Forme $\frac{dy}{dx} = F(ax + by + c)$,
2. Remplacer $v = ax + by + c$ et obtenir la forme $\frac{dv}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} = a + bF(v)$ qui est séparable puis intégrer directement;
3. Finalement, remplacer v par $ax + by + c$ pour obtenir la solution.

S6-Substitution $v = Y/X$

1. Forme 1: $\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{ex+fy+g}$ avec $a/e \neq b/f$.;
2. Faire la substitution $x = X + \alpha$ et $y = Y + \beta$ où α et β sont donnés par $a\alpha + b\beta + c = 0$ et $e\alpha + f\beta + g = 0$ qui donne une EDO homogène (même poids) et utiliser **S1**;
3. Substituer $v = Y/X$, pour obtenir la solution;
4. Forme 2: $\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{ex+fy+g}$ avec $a/e = b/f$ est de la même forme que $\frac{dy}{dx} = F(ax + by + c)$.donc utiliser **S5**.

EDO d'ordre 1 degré $m > 1$

D1-EDO solubles pour $p = dy/dx$

1. Forme: $(p-F_1)(p-F_2)\cdots(p-F_m) = 0$, alors résoudre les m EDO du 1^{ier} degré $p - F_i = 0$ correspondant à chaque facteur et;
2. Écrire la solution sous la forme $G_i(x,y) = 0$;
3. La solution à l'EDO originale est donnée alors par le produit $G_1(x,y)G_2(x,y)\cdots G_m(x,y) = 0$.

D2-EDO solubles pour x

1. Forme: $x = F(y,p)$ alors dériver de chaque côté p/r à y;

2. Réarranger l'EDO résultante sous la forme $G(y,p)=0$ qui peut être utilisée avec l'EDO originale pour éliminer p et ainsi donner la solution générale;
3. Si $G(y,p)$ peut être factorisé alors le facteur qui contient dp/dy devrait être utilisé pour éliminer p et donner la solution générale;
4. Utiliser les autres facteurs pour éliminer p mènera à la place à des solutions singulières.

D3-EDO solubles pour y

1. Forme: $y=F(x,p)$ alors dériver de chaque côté p/r à x;
2. Réarranger l'EDO résultante sous la forme $G(x,p)=0$ qui peut être utilisée avec l'EDO originale pour éliminer p et ainsi donner la solution générale;
3. Si $G(x,p)$ peut être factorisé alors le facteur qui contient dp/dx devrait être utilisé pour éliminer p et donner la solution générale;
4. Utiliser les autres facteurs pour éliminer p mènera à la place à des solutions singulières.

D4-EDO de Clairaut

1. Forme: $y=px+F(p)$, alors la solution générale est donnée en remplaçant p par une constante c : $\frac{dp}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}=0 \Longrightarrow y=cx+F(c)$;
2. Utilisant la relation $dF/dp+x=0$ pour éliminer p de l'EDO originale donne la solution singulière.

EDO d'ordre $n \geq 2$: Méthodes de résolution

EDO linéaires: Forme **EDOL**

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)dy=f(x) \qquad (1)$$

(homogène $f(x)=0$, non homogène $f(x)\neq 0$); La solution générale s'écrit

$$y(x)=y_h(x)+y_p(x) \qquad (2)$$

où $y_h(x)$ est la solution homogène complète et $y_p(x)$, une solution particulière.

Condition pour indépendance linéaire (LI) et le Wronskien: Les n fonctions $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots, y_n(x)$ sont linéairement indépendantes sur un intervalle I si

$$W(y_1,y_2,\ldots,y_n)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \ldots & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (3)$$

sur cet intervalle I; $W(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ est appelé le *Wronskien* de l'ensemble de fonctions.

Condition nécessaire et suffisante pour la dépendance linéaire Les n solutions homogènes $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots, y_n(x)$ de (1) (i.e. pour $f(x)=0$) sont linéairement dépendantes sur un intervalle I si les $a_i(x)$ sont continues et $W(y_1,y_2,\ldots,y_n)\equiv 0$ sur cet intervalle I.

Indépendance linéaire de 2 fonctions (cas simple)
Deux fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont linéairement dépendantes si et seulement on peut écrire $y_1(x)=ay_2(x)$ où a est une constante non-nulle.

Ensemble fondamental de solutions
Soit les n solutions homogènes $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots, y_n(x)$ de (1) (i.e. pour $f(x)=0$). Alors $\{y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots, y_n(x)\}$ est un ensemble fondamental sur I si et seulement si elles sont linéairement indépendantes sur ce même intervalle I.

N1-EDOL à coefficients constants: Solutions homogènes $y_h(x)$

1. Soit la forme **EDOL** (1) avec $a_n(x)=a_n=$ coeff. constants: Poser $f(x)=0$ égal à zéro (si ce n'est pas déjà le cas), et remplacer $y=Ae^{\lambda x}$;
2. Diviser l'équation résultante par $Ae^{\lambda x}$, obtenir une équation polynômiale de degré n en λ (l'équation auxiliaire): $a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0$;
3. Résoudre l'équation auxiliaire pour trouver les n racines, disons $\lambda_1, \lambda_2,\ \ldots, \lambda_n$;
4. Si toutes ces racines sont réelles et distinctes alors $y_h(x)$ est donnée par $y_h(x)=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}+\cdots+c_ne^{\lambda_n x}$;
5. Cependant, si certaines des racines sont complexes ou répétées alors $y_h(x)$ est donnée respectivement par
$$c_1e^{(\alpha+i\beta)x}+c_2e^{(\alpha-i\beta)x}=e^{\alpha x}(d_1\cos\beta x+d_2\sin\beta x) = \begin{cases} Ae^{\alpha x}\sin(\beta x+\phi) \\ Ae^{\alpha x}\cos(\beta x+\phi)\end{cases}$$
ou
$$y_h(x)=e^{\lambda_1 x}\sum_{m=1}^{k-1}c_mx^{m-1}+\sum_{m=k+1}^{n}c_me^{\lambda_m x}$$
ou par sa généralisation
$$y_h(x)=e^{\lambda_1 x}\sum_{m=1}^{k-1}c_mx^{m-1}+e^{\lambda_2 x}\sum_{m=k+1}^{k+l}c_mx^{m-k-1} + \sum_{m=k+l+1}^{n}c_me^{\lambda_m x}$$

N2-EDOL à coefficients constants: Solution particulière $y_p(x)$ – méthodes des coefficients indéterminés

1. Soit la forme **EDOL** (eq 1), déterminer les coefficients indéterminés en utilisant une fonction d'essai $y_p(x)$:
   (a) pour $f(x)=ae^{rx}$: poser $y_p(x)=be^{rx}$;
   (b) pour $f(x)=a_1\sin rx+a_2\cos rx$: poser $\cos y_p(x)=b_1\sin rx+b_2\cos rx$;
   (c) pour $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_Nx^N$: poser $y_p(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_Nx^N$,
   (d) Si $f(x)$ est la somme ou le produit de n'importe quel des trois cas précédents alors on peut essayer un $y_p(x)$ égal à la somme ou le produit des fonctions d'essai individuelles correspondantes.
2. Cependant, si $f(x)$ n'a pas une de ces formes passer à une méthode plus générale, la plus simple étant peut-être **la méthode des variation des paramètres (N6)**.

N3-EDOL de Legendre et de Cauchy-Euler

1. Forme **EDOL de Legendre**: Forme (eq 1) avec $a_n(x)=a_n(\alpha x+\beta)^n$, alors substituer $\alpha x+\ \beta=e^t$; Il en résulte en une équation du même ordre qui peut être résolue par **la méthode des coefficients constants (N1);**
2. Forme **EDOL de Cauchy-Euler:** Forme (eq 1) avec $a_n(x)=a_nx^n$;
   (a) Si $f(x)\neq 0$, substituer $x=e^t$ pour obtenir une équation du même ordre avec coefficients constants **(voir N1)**;
   (b) Si $f(x)=0$, substituer $y=x^\lambda$pour obtenir une équation algébrique dont la solution donne les valeurs permises de λ ; la solution générale est alors la superposition linéaire de ces fonctions.
   Si λ_1 est une racine répétée k fois $(k>1)$ alors les k solutions linéairement indépendantes qui correspondent à ces racines sont $x^{\lambda_1}, x^{\lambda_1}\ln x,\ldots,x^{\lambda_1}(\ln x)^{k-1}$.

N4-EDO linéaires exactes

1. Forme **EDOL** avec $a_0(x)-a_1'(x)+a_2''(x)-\cdots+(-1)^n a_n^{(n)}(x)=0$;
2. Si elle n'est pas exacte, essayer alors de trouver par inspection un facteur d'intégration tel que lorsque multiplié à l'équation la rende exacte;
3. Une fois que l'équation est exacte, écrire le MG comme une dérivée comme dans MG $=\frac{d}{dx}[b_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+b_0(x)y]$.et, en développant cette dérivée et la comparant avec le MG de l'EDO, déterminer les fonctions $b_m(x)$ dans cette dernière équation;
4. Intégrer l'équation résultante pour obtenir une autre EDO, d'un ordre inférieur. Cela pourrait être résolu ou simplifié encore plus si la nouvelle EDO est elle-même exacte ou peut être rendue exacte.

N5-EDO linéaires: Solutions homogènes partiellement connues

1. Forme **EDOL;** Si $u(x)$ est une solution homogène connue (i.e. pour $f(x)=0$), alors faire la substitution $y(x)=u(x)v(x)$;
2. Cela mène à une équation d'ordre $n-1$ en dv/dx qui peut être soluble par les techniques déjà vues.

N6-EDO linéaires: variation des paramètres

1. Forme **EDOL**; Si la solution homogène complète est connue $y_h(x)=\sum_i c_i y_i(x)$ (i.e. pour $f(x)=0$), on suppose que la solution particulière a la même forme, mais avec les constantes c_i remplacées par des fonctions $k_1(x)$;
2. Résoudre le système des équations de contraintes
$$k_1'(x)y_1(x)+k_2'(x)y_2(x)+\cdots=0$$
$$k_1'(x)y_1'(x)+k_2'(x)y_2'(x)+\cdots=0,....$$
$$k_1'(x)y_1^{(n-1)}(x)+k_2'(x)y_2^{(n-1)}(x)+\cdots=f(x)/a_n(x).$$
pour $k_1'(x), k_2', \ldots, k_n'(x)$ soit par élimination ou soit en utilisant la régle de Cramer, ex: pour $n=2$,
$$k_1'(x)=\frac{1}{W}\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f/a_2 & y_2' \end{vmatrix}, k_2'(x)=\frac{1}{W}\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f/a_2 \end{vmatrix}$$
où W est le Wronskien.
3. Intégrer les $k_i'(x)$ avec des constantes d'intégration nulles pour obtenir $k_1(x), k_2(x), \ldots, k_n(x)$ et donc la solution particulière. Alors
$$y(x)=y_h(x)+y_p(x)=\sum_{m=1}^{n}[c_m+k_m(x)]y_m(x).$$

N7-EDO linéaires d'ordre $n=2$

1. Forme **EDOL** $n=2$ ou $\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=f(x)$,alors substituer $y=uv$ où $u(x)$ est donné par $\frac{2u'}{u}+a_1=0 \Longrightarrow u(x)=\exp\left(-\frac{1}{2}\int a_1(z)dz\right)$;
2. Cela mène à une équation de la forme $\frac{d^2v}{dx^2}+g(x)v=h(x)$ dans laquelle il n'y a pas un terme en dv/dx et qui peut être plus facile à résoudre;
3. Ou bien, si la partie de la solution homogène est connue alors suivre une des méthodes plus haut.

N8-Variables dépendantes absentes

1. Si l'EDO contient seulement dérivées de y d'ordre m et plus alors la substitution $p=d^my/dx^m$ réduit l'ordre de l'équation par m.

N9-Variables indépendantes absentes

1. Si l'EDO ne contient pas explicitement la variable indépendante x alors substituer $p=dy/dx$;
2. Ceci mène aux relations suivantes pour les dérivées de degrés plus élevés
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=\frac{dy}{dx}\frac{dp}{dy}=p\frac{dp}{dy}$$
$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}(p\frac{dp}{dy})=\frac{dy}{dx}\frac{d}{dy}(p\frac{dp}{dy})=p^2\frac{d^2p}{dy^2}+p(\frac{dp}{dy})^2$$
et ainsi de suite pour les dérivées d'ordres plus élevés;
3. Après substitution, on obtient une équation d'un ordre inférieur qui peut s'avérer plus facile à résoudre.

N10-EDO non linéaires exactes

1. Réarranger l'équation de façon à ce que tous les termes contenant y ou ses dérivées sont dans le MG, alors vérifiez si l'équation est exacte en essayant d'écrire le MG comme une dérivée simple;
2. Si c'est possible alors l'équation est exacte. Elle peut alors être intégrée directement pour donner une équation d'un ordre inférieur;
3. Si la nouvelle équation est elle-même exacte, le processus peut être répété.

N11-EDO isobares ou de poids homogène

1. Assigner un poids m à y et dy et un poids 1 à x et dx et écrire les poids combinés de chaque terme dans l'EDO;
2. Si ces poids sont égaux pour tous les termes pour une valeur particulière m, l'équation est dite isobare (ou homogène si $m=1$);
3. Faire la substitution $y=vx^m$ suivie de $x=e^t$ mène à une équation dans laquelle la nouvelle variable indépendante t est absente sauf sous la forme d/dt.

N12-EDO de poids homogène en x ou en y seulement

1. Si le poids x seulement est le même dans chaque terme de l'EDO alors la substitution $x=e^t$ mène à une équation dans laquelle la nouvelle variable indépendante t est absente sauf sous la forme d/dt;
2. Si le poids de y seulement est le même est le même dans chaque terme alors la substitution $y=e^v$ mène à une équation dans quelle la nouvelle variable dépendante v est absent sauf sous la forme d/dv.

N13-Transformée de Laplace

1. Prendre la TdL de l'équation au complet en utilisant $\overline{y^{(n)}}(s)=s^n\overline{y}(s)-s^{n-1}y(0)-s^{n-2}y'(0)-\cdots-sy^{(n-2)}(0)-y^{(n-1)}(0)$ pour calculer la TdL des dérivées. ce qui la transforme en une équation purement *algébrique*;
2. Résoudre l'équation algébrique résultante pour obtenir $\overline{y}(s)$, la TdL de la solution à l'EDO;
3. En utilisant la méthode de fractions partielles et/ou consultant une table de TdL pour les fonctions standards, calculer la TdL inverse de $\overline{y}(s)$;
4. La fonction résultante $y(x)$ est la solution de l'EDO qui obéit aux CL données.