MÉCANIQUE ANALYTIQUE (PHY-2000)

Aide-mémoire

Métriques:

En coordonnées cartésiennes (x,y,z): $ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$

En coordonnées sphériques (r,θ,φ): $ds^2 = (dr)^2 + r^2\,(d\theta)^2 + r^2\sin^2\theta\,(d\varphi)^2$

En coordonnées cylindriques (ρ,θ,z): $ds^2 = (d\rho)^2 + \rho^2\,(d\theta)^2 + (dz)^2$

En général: $ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}\,dq_i dq_j$

Potentiels

Harm: $V(x) = \frac{1}{2}k\,(x-x_0)^2$, $k = m\omega^2$

Grav: $V_{grav} = mgh$ ou $-GM/r$

EM: $U_{em} = q_e(\phi - \mathbf{v}\cdot\mathbf{A})$

avec $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ et $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$

Mécanique lagrangienne:

Lagrangien: $L = T - V$ avec $T = \sum_{i,j}\frac{m}{2}g_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$

Contrainte holonome: $f(q_i,\dot{q}_i,t) = \frac{d}{dt}h(q_i,t) = 0$ soit $h(q_i,t) = C$

Équation d'Euler-Lagrange pour un lagrangien $L(q_i,\dot{q}_i,t)$:

Contrainte non holonome: $f(q_i,\dot{q}_i,t) \neq \frac{d}{dt}h(q_i,t)$ ou $f(q_i,\dot{q}_i,t) < 0$ ou $f(q_i,\dot{q}_i,t) > 0$.

Forces conservatrices $(F(r) = -\nabla V(r))$: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$

Forces non conservatrices $(F(r) \neq -\nabla V(r))$: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$ où Q_i = composantes de la force généralisée.

Multiplicateurs de Lagrange avec $f(q_j,\dot{q}_j,t) = 0$: $L' = L + \lambda f(q_j,\dot{q}_j,t)$,Solution physique $= q_i(t,\bar{\lambda})$, ou $f(q_i(t,\bar{\lambda}),\dot{q}_i(t,\bar{\lambda}),t) = 0.$

Potentiel efficace: $V_{\text{eff.}} = V_{\text{eff.}}(r_0) + \left.\frac{\partial V_{\text{eff.}}}{\partial r}\right|_{r_0}(r-r_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 V_{\text{eff.}}}{\partial r^2}\right|_{r_0}(r-r_0)^2 + O(r^3),$

Variables cycliques (lagrangien indépendant de $\dot{q}_i$): $\frac{\partial L}{\partial q_i} \equiv 0$, $\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i} =$ constante.

Mécanique hamiltonienne

Hamiltonien: $H(q_i,p_i,t) = \sum_i^n \dot{q}_i p_i - L(q_i,\dot{q}_i,t)$ avec: $p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}$ et $T = \sum_{i,j}\frac{1}{2m}g_{ij}^{-1}p_i p_j$

Équations canoniques du mouvement: $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$

Crochets de Poisson: $\{A,B\}_{q,p} \equiv \sum_i^n\left[\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i}\right]$ Identité de Jacobi: $\{A,\{B,C\}\} + \{C,\{A,B\}\} + \{B,\{C,A\}\} = 0$

Pour une fonction quelconque F: $\frac{dF}{dt} = \{F,H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$ ($= 0$ pour F= constante du mouvement).

Variables canoniques q_i, p_i: $\{q_k,q_j\} = 0$, $\{p_k,p_j\} = 0$, $\{q_k,p_j\} = \delta_{kj}$

Transformations canoniques (TC): $L = L' + \frac{dF}{dt}$ $H'(Q,P) = H(q,p) + \frac{\partial F}{\partial t}$ avec générateurs

$F_1(q_i,Q_i,t) : p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}$, $P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}$, $\frac{\partial p_i}{\partial Q_j} = -\frac{\partial P_j}{\partial q_i}$ $F_3(p_i,Q_i,t) : q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}$, $P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}$, $\frac{\partial P_j}{\partial p_i} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}$

$F_2(q_i,P_i,t) : p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$, $Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$, $\frac{\partial p_i}{\partial P_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}$ $F_4(p_i,P_i,t) : q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}$, $Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}$, $\frac{\partial Q_j}{\partial p_i} = -\frac{\partial q_i}{\partial P_j}$

Méthode Hamilton-Jacobi (TC de type $F_2(q_i,P_i,t) = S(q_i,\alpha_i,t)$ où on choisit $(Q_i,P_i) = (\beta_i,\alpha_i)$ = const.)

Équation de Hamilton-Jacobi: $H(q_i,\frac{\partial S}{\partial q_i},t) + \frac{\partial S(q_i,\alpha_i,t)}{\partial t} = 0$ avec $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$

Équation caractéristique de Hamilton-Jacobi: $H(q_i,\frac{\partial W}{\partial q_i}) - \alpha_1 = 0$

Pour $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$: $S(q_i,\alpha_i,t) = W(q_i,\alpha_i) - \alpha_1 t$ avec solutions $\beta_i = \frac{\partial S(q_i,\alpha_i,t)}{\partial\alpha_i}$

Variables cycliques: $W(q_i,\alpha_i) = \sum_k^{\text{cycliques}}\alpha_k q_k + W'(q_j,\alpha_j)$

Théorie des perturbations

Hamilton: $H(q_i,p_i) = H_0(q_i,p_i) + H_1(q_i,p_i)$ ou $H_1 < H_0$

Avec les solutions connues de H_0: $\dot{a}_i^{(0)} = \{a_i^{(0)},H_0\} + \frac{\partial}{\partial t}a_i^{(0)} \equiv 0$ $\dot{b}_i^{(0)} = \{b_i^{(0)},H_0\} + \frac{\partial}{\partial t}b_i^{(0)} \equiv 0.$

on solutionne $\dot{a}_i = \{a_i,H_1\}$ et $\dot{b}_i = \{b_i,H_1\}$.

Méthode par série $H_1 = \lambda h(q_i,p_i)$: séries de puissance $a_i = a_i^{(0)} + \lambda a_i^{(1)} + \lambda^2 a_i^{(2)} + \cdots$

Méthode itérative: $\dot{a}_i^{(n+1)} = \{a_i,H_1\}|_{a_j^{(n)},b_j^{(n)}}$ et $\dot{b}_i^{(n+1)} = \{b_i,H_1\}|_{a_j^{(n)},b_j^{(n)}}$

Méthode de la moyenne (orbite cyclique de période τ): $\bar{\dot{a}}_i = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau\{a_i,H_1\}dt$ et $\bar{\dot{b}}_i = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau\{b_i,H_1\}dt$

Solides indéformables

Tenseur d'inertie: $I_{ik} = \sum_{\text{part.}} m\,[\delta_{ik}x_l x_l - x_i x_k] = \int_V \rho_{\text{masse}}(\mathbf{x})\,[\delta_{ik}x_l x_l - x_i x_k]\,d^3x$

Dynamique de rotation: torque $\tau_i = \frac{dL_i}{dt} = I_{ik}\alpha_k$, moment cinétique $L_i = I_{ik}\Omega_k$, $T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\Omega_i I_{ik}\Omega_k$

Moments d'inertie principaux (diagonalisation): $UIU^{-1} = I_D$ où I_D=diag(I_1,I_2,I_3)

Équations d'Euler: $I_i\frac{d\Omega_i}{dt} + \epsilon_{ijk}\Omega_j\Omega_k I_k = \tau_i$ (pas de somme sur i)

Toupie: sphérique: $I_1 = I_2 = I_3 = I$, symétrique: $I_1 = I_2 \neq I_3$, asymétrique: I_1, I_2, I_3 différents

Moments d'inertie I par rapport à l'axe de symétrie:

Masse ponctuelle:	MR^2	Disque ou cyl. plein:	$\frac{1}{2}MR^2$	Cyl. creux/anneau mince:	MR^2
Tige p/r centre:	$\frac{1}{12}MR^2$	Tige p/r extrémité:	$\frac{1}{3}MR^2$	Anneau épais:	$\frac{1}{2}M(R_{\text{int}}^2 + R_{\text{ext}}^2)$
Sphère pleine:	$\frac{2}{5}MR^2$	Sphère creuse:	$\frac{2}{3}MR^2$		

Condition de roulement sans glissement: $v = \Omega R$

Théorème des axes parallèles: $I = I_{CM} + M\cdot d^2$

Théorème des plaques minces: $I_z = I_x + I_y$

Constantes usuelles:

Accélération gravitationnelle: $g = 9.8$ m·s^{-2}

Rayon terrestre: $R = 6378\,\text{km}$

Vitesse angulaire terrestre: $\omega = 7.27\times10^{-5}$rad·s^{-1}

Angles d'Euler

$\mathbf{v}' = R\mathbf{v}$ avec $c_\alpha = \cos\alpha$ $s_\alpha = \sin\alpha$, $\alpha = \varphi,\theta,\psi$

$$R = \begin{pmatrix} c_\psi c_\varphi - c_\theta s_\psi s_\varphi & c_\psi s_\varphi + c_\theta c_\varphi s_\psi & s_\theta s_\psi \\ -c_\varphi s_\psi - c_\theta c_\psi s_\varphi & c_\theta c_\psi c_\varphi - s_\psi s_\varphi & c_\psi s_\theta \\ s_\theta s_\varphi & -c_\varphi s_\theta & c_\theta \end{pmatrix}$$

$\Omega_1 = \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi$

$\Omega_2 = -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi$

$\Omega_3 = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}$