Mécanique analytique (PHY-2000 )

**Aide-mémoire**

**Métriques** $g_{ij}$**:** $ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dq_i dq_j$

Coord. cartésiennes $(x,y,z)$ : $g_{ij} = \mathrm{diag}(1,1,1)$

Coord. sphériques $(x,y,z) = r(\cos\theta, \sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi)$:
$g_{ij} = \mathrm{diag}(1, r^2, r^2\sin^2\theta)$

Coord. cylindriques $(x,y,z) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)$:
$g_{ij} = \mathrm{diag}(1, \rho^2, 1)$

Énergie cinétique: $T = \sum_{i,j} \frac{m}{2} g_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$ ou $T = \sum_{i,j} \frac{1}{2m} g_{ij}^{-1} p_i p_j$

**Potentiels**

Harm: $V(x) = \frac{1}{2}k\,(x - x_0)^2$, $k = m\omega^2$

Grav: $V_{grav} = mgh$ ou $-GM/r$

EM: $U_{em} = q_e(\phi - \mathbf{v}\cdot\mathbf{A})$ avec $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ et $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$

**Mécanique lagrangienne**:

Lagrangien: $L = T - V$ avec $T = \sum_{i,j} \frac{m}{2} g_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$

Contr. holonome: $f(q_i, \dot{q}_i, t) = \frac{d}{dt}h(q_i, t) = 0$ soit $h(q_i, t) = C$

si $\frac{\partial f}{\partial t}\begin{cases} = 0 & : \text{ contr. scléronome} \\ \neq 0 & : \text{ contr. rhéonome} \end{cases}$

Contr. non holonome: $f(q_i, \dot{q}_i, t) \neq \frac{d}{dt}h(q_i, t)$ ou $f(q_i, \dot{q}_i, t) < 0$

Équation d'Euler-Lagrange pour un lagrangien $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ :

Forces conservatrices ($\mathbf{F}(r) = -\nabla V(r)$):

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$.ou $f(q_i, \dot{q}_i, t) > 0$.

Forces non conservatrices ($\mathbf{F}(r) \neq -\nabla V(r)$):

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$

où $Q_i$= composantes de la force généralisée.

Multiplicateurs de Lagrange avec $f(q_j, \dot{q}_j, t) = 0$:

$L' = L + \lambda f(q_j, \dot{q}_j, t)$,

Solution physique = $q_i(t, \bar{\lambda})$ , où $f(q_i(t,\bar{\lambda}), \dot{q}_i(t,\bar{\lambda}), t) = 0$.

Potentiel efficace:

$V_{\text{eff}}(r) = V_{\text{eff}}\big|_{r_0} + \frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial r}\Big|_{r_0}(r - r_0) + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 V_{\text{eff}}}{\partial r^2}\Big|_{r_0}(r - r_0)^2\cdots$

Variables cycliques (lagrangien indépendant de $q_i$):

$\frac{\partial L}{\partial q_i} \equiv 0$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} =$ cte.

**Mécanique hamiltonienne**

Hamiltonien: $H(q_i, p_i, t) = \sum_i^n \dot{q}_i p_i - L(q_i, \dot{q}_i, t)$

avec: $p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ et $T = \sum_{i,j} \frac{1}{2m} g_{ij}^{-1} p_i p_j$

Équations canoniques du mouvement: $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$

Crochets de Poisson: $\{A, B\}_{q,p} \equiv \sum_i^n \left[\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i}\right]$

Identité de Jacobi: $\{A, \{B, C\}\} + \{C, \{A, B\}\} + \{B, \{C, A\}\} = 0$

Pour une fonction quelconque $F$:

$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$ ($= 0$ pour $F$= cte du mouvement).

Variables canoniques $q_i, p_i$:

$\{q_k, q_j\} = 0$, $\{p_k, p_j\} = 0$, $\{q_k, p_j\} = \delta_{kj}$

Transformations canoniques (TC):

$L = L' + \frac{dF}{dt}$ $H'(Q, P) = H(q, p) + \frac{\partial F}{\partial t}$ avec générateurs

| | | | |
|---|---|---|---|
| $F_1(q_i, Q_i, t)$ : | $p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}$ | $P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}$ | $\frac{\partial p_i}{\partial Q_j} = -\frac{\partial P_j}{\partial q_i}$ |
| $F_2(q_i, P_i, t)$ : | $p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$ | $Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$ | $\frac{\partial p_i}{\partial P_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}$ |
| $F_3(p_i, Q_i, t)$ : | $q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}$ | $P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}$ | $\frac{\partial P_j}{\partial p_i} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}$ |
| $F_4(p_i, P_i, t)$ : | $q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}$ | $Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}$ | $\frac{\partial Q_j}{\partial p_i} = -\frac{\partial q_i}{\partial P_j}$ |

**Méthode Hamilton-Jacobi** (TC de type $F_2$)

$F_2(q_i, P_i, t) = S(q_i, \alpha_i, t)$ où $(Q_i, P_i) = (\beta_i, \alpha_i) =$ cte.

Équation de Hamilton-Jacobi:

$H(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t) + \frac{\partial S(q_i, \alpha_i, t)}{\partial t} = 0$ avec $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$

Équation caractéristique de Hamilton-Jacobi:

$H(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}) - \alpha_1 = 0$

Pour $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ : $S(q_i, \alpha_i, t) = W(q_i, \alpha_i) - \alpha_1 t$

où $\beta_i = \frac{\partial S(q_i, \alpha_i, t)}{\partial \alpha_i}$

Variables cycliques: $W(q_i, \alpha_i) = \sum_k^{\text{cycliques}} \alpha_k q_k + W'(q_j, \alpha_j)$

**Théorie des perturbations**

Hamilton: $H(q_i, p_i) = H_0(q_i, p_i) + H_1(q_i, p_i)$ ou $H_1 < H_0$

Avec les solutions connues de $H_0$:

$\dot{a}_i^{(0)} = \{a_i^{(0)}, H_0\} + \frac{\partial}{\partial t}a_i^{(0)} \equiv 0$ $\dot{b}_i^{(0)} = \{b_i^{(0)}, H_0\} + \frac{\partial}{\partial t}b_i^{(0)} \equiv 0.$

on solutionne $\dot{a}_i = \{a_i, H_1\}$ et $\dot{b}_i = \{b_i, H_1\}$.

Méthode par série $H_1 = \lambda h(q_i, p_i)$: séries de puissance

$a_i = a_i^{(0)} + \lambda a_i^{(1)} + \lambda^2 a_i^{(2)} + \cdots$

Méthode itérative:

$\dot{a}_i^{(n+1)} = \{a_i, H_1\}\big|_{a_j^{(n)}, b_j^{(n)}}$ et $\dot{b}_i^{(n+1)} = \{b_i, H_1\}\big|_{a_j^{(n)}, b_j^{(n)}}$

Méthode de la moyenne (orbite cyclique de période $\tau$):

$\bar{\dot{a}}_i = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \{a_i, H_1\}dt$ et $\bar{\dot{b}}_i = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \{b_i, H_1\}dt$

**Solides indéformables**

Tenseur d'inertie:

$I_{ik} = \sum_{\text{part.}} m\,[\delta_{ik}x_l x_l - x_i x_k] = \int_V \rho_{\text{masse}}(x)\,[\delta_{ik}x_l x_l - x_i x_k]\,d^3x$

Dynamique de rotation:

torque: $\tau_i = \frac{dL_i}{dt} = I_{ik}\alpha_k$,

moment cinétique: $L_i = I_{ik}\Omega_k$,

énergie cinétique: $T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\Omega_i I_{ik}\Omega_k$

Moments d'inertie principaux (diagonalisation):

$UIU^{-1} = I_D$ où $I_D = \mathrm{diag}(I_1, I_2, I_3)$

Équations d'Euler: $I_i\frac{d\Omega_i}{dt} + \epsilon_{ijk}\Omega_j\Omega_k I_k = \tau_i$ $(i = 1, 2.3)$

Toupie sphérique: $I_1 = I_2 = I_3 = I$,

Toupie symétrique: $I_1 = I_2 \neq I_3$,

Toupie asymétrique: $I_1, I_2, I_3$ différents

Moments d'inertie $I$ par rapport à l'axe de symétrie:

| | | | |
|---|---|---|---|
| masse ponctuelle: | $mr^2$ | disque/cyl. plein: | $\frac{1}{2}mr^2$ |
| anneau mince: | $mr^2$ | anneau épais: | $\frac{1}{2}m(r_{\text{int}}^2 + r_{\text{ext}}^2)$ |
| tige p/r centre: | $\frac{1}{12}mr^2$ | tige p/r extrémité: | $\frac{1}{3}mr^2$ |
| sphère pleine: | $\frac{2}{5}mr^2$ | sphère creuse: | $\frac{2}{3}mr^2$ |

Condition de roulement sans glissement: $v = \Omega R$

Théorème des axes parallèles: $I = I_{CM} + M\cdot d^2$

Théorème des plaques minces: $I_z = I_x + I_y$

Constantes usuelles:

accélération gravitationnelle: $g = 9.8$ m·s$^{-2}$

rayon terrestre: $R = 6378\,\text{km}$

vitesse angulaire terrestre: $\omega = 7.27\times 10^{-5}$rad· s$^{-1}$

Angles d'Euler

$\mathbf{v}' = R\mathbf{v}$ avec $c_\alpha = \cos\alpha$ $s_\alpha = \sin\alpha$, $\alpha = \varphi, \theta, \psi$

$$R = \begin{pmatrix} c_\psi c_\varphi - c_\theta s_\psi s_\varphi & c_\psi s_\varphi + c_\theta c_\varphi s_\psi & s_\theta s_\psi \\ -c_\varphi s_\psi - c_\theta c_\psi s_\varphi & c_\theta c_\psi c_\varphi - s_\psi s_\varphi & c_\psi s_\theta \\ s_\theta s_\varphi & -c_\varphi s_\theta & c_\theta \end{pmatrix}$$

moment et énergie cinétique: $L_i = I_{ik}\Omega_k$ et $T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\Omega_i I_{ik}\Omega_k$

avec $\mathbf{\Omega} = (\dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi, -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi, \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})$

$I_1 = I_2 = I_3$ : $T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\theta)$

$I_1 = I_2 \neq I_3$: $T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2$