

Métriques:

En coordonnées cartésiennes (x, y, z) : $ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$
 En coordonnées sphériques (r, θ, φ) : $ds^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (d\varphi)^2$
 En coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) : $ds^2 = (d\rho)^2 + \rho^2(d\theta)^2 + (dz)^2$
 En général: $ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dq_i dq_j$

Potentiels

Harm: $V(x) = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$, $k = m\omega^2$
 Grav: $V_{grav} = mgh$ ou $-GM/r$
 EM: $U_{em} = q_e(\phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$
 avec $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ et $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$

Mécanique lagrangienne:

Lagrangien: $L = T - V$ avec $T = \sum_{i,j} \frac{m}{2} g_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$ Contrainte holonome: $f(q_i, \dot{q}_i, t) = \frac{d}{dt}h(q_i, t) = 0$ soit $h(q_i, t) = C$
 Équation d'Euler-Lagrange pour un lagrangien $L(q_i, \dot{q}_i, t)$: Contrainte non holonome: $f(q_i, \dot{q}_i, t) \neq \frac{d}{dt}h(q_i, t)$ ou $f(q_i, \dot{q}_i, t) < 0$
 Forces conservatrices ($F(r) = -\nabla V(r)$): $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ ou $f(q_i, \dot{q}_i, t) > 0$.
 Forces non conservatrices ($F(r) \neq -\nabla V(r)$): $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$ où $Q_i =$ composantes de la force généralisée.
 Multiplicateurs de Lagrange avec $f(q_j, \dot{q}_j, t) = 0$: $L' = L + \lambda f(q_j, \dot{q}_j, t)$, Solution physique = $q_i(t, \bar{\lambda})$, ou $f(q_i(t, \bar{\lambda}), \dot{q}_i(t, \bar{\lambda}), t) = 0$.
 Potentiel efficace: $V_{eff} = V_{eff}(r_0) + \left. \frac{\partial V_{eff}}{\partial r} \right|_{r_0} (r - r_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial r^2} \right|_{r_0} (r - r_0)^2 + O(r^3)$,
 Variables cycliques (lagrangien indépendant de \dot{q}_i): $\frac{\partial L}{\partial q_i} \equiv 0$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} =$ constante.

Mécanique hamiltonienne

Hamiltonien: $H(q_i, p_i, t) = \sum_i \dot{q}_i p_i - L(q_i, \dot{q}_i, t)$ avec: $p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ et $T = \sum_{i,j} \frac{1}{2m} g_{ij}^{-1} p_i p_j$
 Équations canoniques du mouvement: $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$
 Crochets de Poisson: $\{A, B\}_{q,p} \equiv \sum_i^n \left[\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right]$ Identité de Jacobi: $\{A, \{B, C\}\} + \{C, \{A, B\}\} + \{B, \{C, A\}\} = 0$
 Pour une fonction quelconque F : $\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$ ($= 0$ pour $F =$ constante du mouvement).
 Variables canoniques q_i, p_i : $\{q_k, q_j\} = 0$, $\{p_k, p_j\} = 0$, $\{q_k, p_j\} = \delta_{kj}$
 Transformations canoniques: $L = L' + \frac{dF}{dt}$ $H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}$ avec générateurs
 $F_1(q_i, Q_i, t) : p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}$, $P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}$, $\frac{\partial p_i}{\partial Q_j} = -\frac{\partial P_j}{\partial q_i}$ $F_3(p_i, Q_i, t) : q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}$, $P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}$, $\frac{\partial P_j}{\partial p_i} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}$
 $F_2(q_i, P_i, t) : p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$, $Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$, $\frac{\partial p_i}{\partial P_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}$ $F_4(p_i, P_i, t) : q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}$, $Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}$, $\frac{\partial Q_j}{\partial p_i} = -\frac{\partial q_i}{\partial P_j}$

Méthode Hamilton-Jacobi

Équation de Hamilton-Jacobi: $H(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t) + \frac{\partial S(q_i, \alpha_i, t)}{\partial t} = 0$ avec $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$
 Équation caractéristique de Hamilton-Jacobi: $H(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}) - \alpha_1 = 0$
 Pour $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$: $S(q_i, \alpha_i, t) = W(q_i, \alpha_i) - \alpha_1 t$
 Variables cycliques: $W(q_i, \alpha_i) = \sum_k^{cycliques} \alpha_k q_k + W'(q_j, \alpha_j)$

Théorie des perturbations

Hamilton: $H(q_i, p_i) = H_0(q_i, p_i) + H_1(q_i, p_i)$ ou $H_1 < H_0$
 Avec les solutions connues de H_0 : $\dot{a}_i^{(0)} = \{a_i^{(0)}, H_0\} + \frac{\partial}{\partial t} a_i^{(0)} \equiv 0$ $\dot{b}_i^{(0)} = \{b_i^{(0)}, H_0\} + \frac{\partial}{\partial t} b_i^{(0)} \equiv 0$.
 on solutionne $\dot{a}_i = \{a_i, H_1\}$ et $\dot{b}_i = \{b_i, H_1\}$.
 Méthode par série $H_1 = \lambda h(q_i, p_i)$: séries de puissance $a_i = a_i^{(0)} + \lambda a_i^{(1)} + \lambda^2 a_i^{(2)} + \dots$
 Méthode itérative: $\dot{a}_i^{(n+1)} = \{a_i, H_1\}|_{a_j^{(n)}, b_j^{(n)}}$ et $\dot{b}_i^{(n+1)} = \{b_i, H_1\}|_{a_j^{(n)}, b_j^{(n)}}$

Méthode de la moyenne (orbite cyclique de période τ): $\bar{a}_i = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \{a_i, H_1\} dt$ et $\bar{b}_i = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \{b_i, H_1\} dt$

Solides indéformables

Tenseur d'inertie: $I_{ik} = \sum_{part.} m [\delta_{ik} x_l x_l - x_i x_k] = \int_V \rho_{masse}(\mathbf{x}) [\delta_{ik} x_l x_l - x_i x_k] d^3x$
 Dynamique de rotation: torque $\tau_i = \frac{dL_i}{dt} = I_{ik} \alpha_k$, moment cinétique $L_i = I_{ik} \Omega_k$, $T_{rot} = \frac{1}{2} \Omega_i I_{ik} \Omega_k$
 Moments d'inertie principaux (diagonalisation): $UIU^{-1} = I_D$ où $I_D = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$
 Équations d'Euler: $I_i \frac{d\Omega_i}{dt} + \epsilon_{ijk} \Omega_j \Omega_k I_k = \tau_i$ (pas de somme sur i)
 Toupie: sphérique: $I_1 = I_2 = I_3 = I$, symétrique: $I_1 = I_2 \neq I_3$, asymétrique: I_1, I_2, I_3 différents
 Moments d'inertie I par rapport à l'axe de symétrie:
 Masse ponctuelle: MR^2 Disque ou cyl. plein: $\frac{1}{2}MR^2$ Cyl. creux/anneau mince: MR^2
 Tige p/r centre: $\frac{1}{12}MR^2$ Tige p/r extrémité: $\frac{1}{3}MR^2$ Anneau épais: $\frac{1}{2}M(R_{int}^2 + R_{ext}^2)$
 Sphère pleine: $\frac{2}{5}MR^2$ Sphère creuse: $\frac{2}{3}MR^2$

Condition de roulement sans glissement: $v = \Omega R$

Théorème des axes parallèles: $I = I_{CM} + M \cdot d^2$

Théorème des plaques minces: $I_z = I_x + I_y$

Constantes usuelles:

Accélération gravitationnelle: $g = 9.8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$
 Rayon terrestre: $R = 6378 \text{ km}$
 Vitesse angulaire terrestre: $\omega = 7.27 \times 10^{-5} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$

Angles d'Euler

$\mathbf{v}' = R\mathbf{v}$ avec $c_\alpha = \cos \alpha$ $s_\alpha = \sin \alpha$, $\alpha = \varphi, \theta, \psi$
 $R = \begin{pmatrix} c_\psi c_\varphi - c_\theta s_\psi s_\varphi & c_\psi s_\varphi + c_\theta c_\varphi s_\psi & s_\theta s_\psi \\ -c_\varphi s_\psi - c_\theta c_\psi s_\varphi & c_\theta c_\psi c_\varphi - s_\psi s_\varphi & c_\psi s_\theta \\ s_\theta s_\varphi & -c_\varphi s_\theta & c_\theta \end{pmatrix}$
 $\Omega_1 = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi$
 $\Omega_2 = -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi$
 $\Omega_3 = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}$