Théorie quantique des champs I
PHY-7006
Département de Physique, génie physique et optique, Université Laval
SESSION: AUTOMNE 2019
Calendrier des travaux et épreuves

À REMETTRE AU PLUS TARD LE 20 DÉCEMBRE 2019

Exercices–Série 1

1. On considère la théorie quantique d'un champ scalaire complexe $\phi(x)$ satisfaisant à l'équation de Klein-Gordon. L'action de cette théorie s'écrit
$$S = \int d^4x \left(\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \right)$$
Il est plus facile d'analyser cette théorie à l'aide des variables dynamiques $\phi(x)$ et $\phi^*(x)$ qu'à l'aide des parties réelles et imaginaires de $\phi(x)$.

   (a) Montrer que $\phi(x)$ satisfait à l'équation de Klein-Gordon.

   (b) Trouver les impulsions conjuguées à $\phi(x)$ et à $\phi^*(x)$. Montrer que l'hamiltonien s'écrit
$$H = \int d^3x (\pi^* \pi + \boldsymbol{\nabla} \phi^* \cdot \boldsymbol{\nabla} \phi + m^2 \phi^* \phi).$$

   (c) Montrer que H peut être diagonalisé en introduisant deux types d'opérateurs: de création et d'annihilation, et en écrivant
$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} e^{-ip\cdot x} + b^\dagger_{\mathbf{p}} e^{ip\cdot x}).$$
Montrer que la théorie contient deux particules de masse m.

   (d) Le lagrangien est invariant sous la transformation $\phi \to e^{i\alpha}\phi$.Cette symétrie donne lieu au courant conservé
$$j^\mu = i\phi^* \overleftrightarrow{\partial^\mu} \phi)$$
où
$$X \overleftrightarrow{\partial^\mu} Y \equiv X \partial^\mu Y - (\partial^\mu X) Y.$$
Réécrire la charge conservée
$$Q = \int d^3x j^0$$
en termes des opérateurs de création et d'annihilation et calculer la charge des deux particules.

2. Démontrer les identités suivantes:
$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu, \tag{1}$$
$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = 4g^{\nu\rho}, \tag{2}$$
$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu = -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu, \tag{3}$$
$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\tau \gamma_\mu = 2(\gamma^\tau \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma + \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\tau) \tag{4}$$

3. Démontrer que
$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2 = \mathbf{p}^2.$$

4. Calculer $\mathrm{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu]$. Indice: utiliser la propriété cyclique de la trace .

5. Démontrer l'identité suivante:
$$\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\lambda = g_{\alpha\beta} \gamma_\lambda + g_{\beta\lambda} \gamma_\alpha - g_{\alpha\lambda} \gamma_\beta - i\epsilon_{\mu\alpha\beta\lambda} \gamma^\mu \gamma_5$$
Remarque: si vous utilisez une relation d'un livre (e.g. Peskin & Schroeder), il faut la démontrer aussi (à moins que ce ne soit trivial).

6. Démontrer l'identité de Gordon:

$$\overline{u}(p')\gamma^{\mu}u(p) = \overline{u}(p')[\frac{p'^{\mu} + p^{\mu}}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu}{}_{\nu}q_{\nu}}{2m}]u(p),$$

où $q = (p' - p)$.

7. Les transformations de Fierz: Dans la base

$$\Lambda_i = \{I, \gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu}, \gamma_\mu\gamma_5, \gamma_5\},$$

montrer qu'on peut écrire

$$\overline{u}_3\Lambda_i u_2\overline{u}_1\Lambda_i u_4 = \sum_{j=1}^{5} \lambda_{ij}\overline{u}_1\Lambda_j u_2\overline{u}_3\Lambda_j u_4$$

où

$$\lambda_{ij} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & -2 & -4 \\ 12 & 0 & -2 & 0 & 12 \\ -4 & -2 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour y arriver, écrire

$$u_2\overline{u}_1 = a \cdot I + b_\mu\gamma^\mu + c_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} + d_\mu\gamma^\mu\gamma_5 + f\gamma_5$$

On peut trouver les coefficients

$$\{a, b_\mu, c_{\mu\nu}, d_\mu, f\}$$

en multipliant chaque côté de cette expression par une des matrice $\{I, \gamma^\lambda, \sigma^{\alpha\beta}, \gamma^\lambda\gamma_5, \gamma_5\}$ et en calculant la trace. Indice : Soit un vecteur colonne A et un vecteur ligne B, on peut facilement démontrer que

$$\mathrm{Tr}[AB] = \mathrm{Tr}[BA] = BA$$

(par exemple ici $\mathrm{Tr}[u_2\overline{u}_1] = \overline{u}_1 u_2$).

Théorie quantique des champs I
PHY-7006
Département de Physique, génie physique et optique, Université Laval
Session: Automne 2019
Calendrier des travaux et épreuves

À remettre au plus tard le 20 décembre 2019

Exercices–Série 2

1. Peskin & Schroeder, Chapitre 4: Problème 4.4
2. Peskin & Schroeder, Chapitre 5: Problème 5.1
3. **La diffusion Bhabha**: (même que Peskin & Schroeder, Chapitre 5: no. 5.2)
   Calculer, dans QED, la section efficace différentielle $d\sigma/d\cos\theta$ pour la diffusion Bhabha,
   $$e^+e^- \to e^+e^-,$$
   dans la limite $E_{cm} >> m_e$ (i.e. la masse de l'électron est négligeable).
   Il y a deux diagrammes de Feynman. Il faut additionner avant de calculer $|\mathcal{M}|^2-$ les diagrammes de canal s et de canal t.
   Attention au signe relatif entre les deux diagrammes! (Indice: est-ce qu'on peut changer un diagramme en l'autre en échangeant deux fermions)
   En fonction des variables de Mandelstam, s, t et u, la réponse devrait être:
   $$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{s}[u^2(\frac{1}{s}+\frac{1}{t})^2 + (\frac{t}{s})^2 + (\frac{s}{t})^2]$$
   Réécrire cette formule en fonction de $\cos\theta$ plutôt que s, t et u, et en tracer la courbe ($\cos\theta$ est en ordonnée).
   Quelle est la cause physique de la divergence de la section efficace différentielle lorsque $\theta \to 0$?
   Remarque: dans la limite où $m_e = 0$, $s + t + u = 0$.

Théorie quantique des champs I
PHY-7006
Département de Physique, génie physique et optique, Université Laval
SESSION: AUTOMNE 2019
Calendrier des travaux et épreuves

À REMETTRE AU PLUS TARD LE 20 DÉCEMBRE 2019

Exercices–Série 3

Peskin & Schroeder, Chapitre 6: Problème 6.2
Peskin & Schroeder, Chapitre 7: Problème 7.2
Note: Pour ces deux problèmes, les calculs sont relativement longs.