Introduction à la relativité générale
PHY-4201/PHY-7007
Département de Physique, génie physique et optique, Université Laval
SESSION: AUTOMNE 2019
Calendrier des travaux et épreuves

Calendrier : *Vérifiez régulièrement les dates de remise des travaux; elles sont sujettes à changement.*

		Date	Pondération/note finale
Exercices–Série 1	:	3 octobre 2019	10%
Exercices–Série 2	:	~~17 octobre 2019~~ → 21 octobre 2019	10%
Examen 1	:	24 octobre 2019	35%
Exercices–Série 3	:	5 décembre 2019	10%
Examen 2	:	19 décembre 2019	35%

Attention :

- *Vérifiez régulièrement les énoncés; il peut y avoir des corrections de dernière minute et les devoirs sont ajoutés en cours de session. Tout retard dans la remise des travaux sera pénalisé de 10% par jour de retard.*
- La collaboration est encouragée. Vous pouvez remettre un solutionnaire par équipe de 2 personnes (maximum). Un solutionnaire individuel est aussi accepté.
- Les travaux doivent être remis sous forme papier. Veuillez imprimer (s'il y a lieu), numéroter les pages, et brochez vos solutionnaires! 5% des points seront réservés à la qualité de la présentation et à l'exactitude de la langue.

(voir pages suivantes pour les énoncés)

À REMETTRE AU PLUS TARD LE 3 OCTOBRE 2019

Attention: *Tout retard dans la remise des exercices sera pénalisé de 10% par jour de retard.*
Exercices–Série 1- (Carroll Ch 1-2)

1. Un tenseur T de type $(0,2)$ est dit antisymétrique si $T(A,B) = -T(B,A)$ pour toute paire de vecteurs A et B.
   (a) Montrez qu'il est suffisant, pour prouver que T est antisymétrique, que cette relation soit satisfaite lorsque les arguments sont n'importe quelle paire de vecteurs de base $\hat{e}_{(\alpha)}$.
   (b) Dénombrez le nombre de composantes indépendantes de T et donnez-en la liste. Quel serait le nombre de composantes indépendantes si T était symétrique?
   (c) Montrez que $T_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = 0$ pour tout vecteur p.

2. On vous donne, dans un repère inertiel $\mathcal{O}$, un vecteur dont les composantes sont $u^\mu = (1+t^2, t^2, \sqrt{2}\, t, 0)$ et un champ scalaire $\phi(x^\mu) = x^2 + t^2 - y^2$.
   (a) Obtenez les composantes de la 1-forme (covecteur) $\mathrm{d}\phi$ et du vecteur correspondant à $\mathrm{d}\phi$.
   (b) Déterminez $\mathrm{d}\phi(u)$, c.-à-d. le gradient dans la direction de u.

3. Les vecteurs $(\hat{e}_{(0)}, \hat{e}_{(1)}, \hat{e}_{(2)}, \hat{e}_{(3)})$, (correspondant aux coordonnées t, x, y, z) forment une base orthonormée en relativité restreinte. On définit les vecteurs $\sqrt{2}\, l = \hat{e}_{(0)} + \hat{e}_{(3)}$ et $\sqrt{2}\, n = \hat{e}_{(0)} - \hat{e}_{(3)}$. Montrez que les vecteurs l et n sont de genre lumière («null» en anglais) et que les vecteurs $(l, n, \hat{e}_{(1)}, \hat{e}_{(2)})$ forment une base (c'est-à-dire qu'ils sont linéairement indépendants de sorte qu'il n'existe aucune combinaison linéaire de ces vecteurs donnant 0, sauf pour le cas trivial où les coefficients sont identiquement nuls; ou, de façon équivalente, qu'ils peuvent représenter tous les vecteurs de l'espace).

4. Pour cette question, utilisez la métrique $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1,1,1,1)$. Portez une attention particulière à la position des indices et suivez la notation matricielle (voir aide-mémoire), où le premier indice (ici μ) de la matrice $X^{\mu\nu}$ désigne la ligne (**horizontale**) et le deuxième (ici ν) la colonne (**verticale**). On vous donne un tenseur $X^{\mu\nu}$ et un vecteur V^μ ayant les composantes suivantes:

$$X^{\mu\nu} = \underset{\nu\rightarrow}{(X^{\mu\nu})}^{\overset{\mu}{\downarrow}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \text{et } V^0 = -1, V^1 = 2, V^2 = 0, V^3 = -2.$$

   Évaluez les expressions suivantes [pour (a), (b) et (c), ceci veut dire de donner toutes les composantes du tenseur, de préférence sous une forme matricielle, comme pour $X^{\mu\nu}$ ci-haut]:
   (a) $X^\mu{}_\nu$
   (b) $X_\mu{}^\nu$
   (c) $X^{[\mu\,\nu]}$
   (d) $X^{\mu\nu}\, V_\mu$
   (e) $X^\mu{}_\mu$

À remettre au plus tard le
~~17 octobre 2019~~
$\rightarrow$ 21 octobre 2019

Attention: *Tout retard dans la remise des exercices sera pénalisé de 10% par jour de retard.*
Exercices–Série 2 - (Carroll Ch 3)

1. **Loi de transformation**
Soit $\Lambda^{\alpha'}_{\ \nu}$ la loi de transformation entre deux systèmes de coordonnées S et S' et la métrique de Minkowski. Sous forme matricielle, on a:

$$\Lambda^{\alpha'}_{\ \nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

   (a) Trouvez les composantes $F_{\alpha'\beta'}$ du tenseur de Faraday, sachant que ses composantes sont données dans S par (sous forme matricielle):

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (b) Donnez une expression explicite pour les composantes des champs électrique et magnétique dans le repère S'. De quelle transformation de coordonnées s'agit-il?

2. **Calcul tensoriel élémentaire** (avec $\partial_\gamma g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta,\gamma}$)

   (a) Prouvez l'identité $g_{\alpha\beta,\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta\gamma} + \Gamma_{\beta\alpha\gamma}$.

   (b) Prouvez l'identité $g_{\alpha\mu} g^{\mu\beta}{}_{,\gamma} = -g^{\mu\beta} g_{\alpha\mu,\gamma}$.

   (c) Calculez les symboles de Christoffel $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ non-nuls de la métrique $\mathrm{d}s^2 = (-\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2)/t^2$, où $\Gamma^{\mu}_{\ \beta\gamma} = g^{\alpha\mu}\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$.

3. **Calcul de bases orthonormées naturelles**[1] **et commutateur**

   (a) On vous donne la métrique suivante:

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{1}{t^2}(-\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2).$$

      i. Construisez la base orthonormée naturelle $\hat{e}_{(\hat{\alpha})}$ associée à ces coordonnées.

      ii. Calculez les fonctions $c^{\hat{\gamma}}_{\ \hat{\alpha}\hat{\beta}}$ définies par la relation

$$[\hat{e}_{(\hat{\alpha})}, \hat{e}_{(\hat{\beta})}] = c^{\hat{\gamma}}_{\ \hat{\alpha}\hat{\beta}} \hat{e}_{(\hat{\gamma})} \ .$$

      où $[\hat{e}_{(\hat{\alpha})}, \hat{e}_{(\hat{\beta})}]$ est un commutateur.

      iii. Donnez une explication géométrique simple de la signification d'un commutateur non-nul.
      Indice: rappelez-vous la correspondance entre un vecteur pointant le long d'un axe de coordonnées et une dérivée partielle (exemple: $\hat{e}_{(r)}$ et $\partial/\partial r$, etc ...)

   (b) La métrique de Schwarzschild décrit le champ gravitationnel à l'extérieur d'une étoile sphériquement symétrique:

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)}\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \ \ \mathrm{d}\phi^2) \ .$$

      i. Construisez la base orthonormée naturelle $\hat{e}_{(\hat{\alpha})}$ associée à ces cooordonnées.[2]

[1] Note : La base orthonormée naturelle est aussi appelée tétrade ou vielbein (Carroll Ch 3).
[2] Note : Ces vecteurs de base orthonormée $\hat{e}_{(\hat{\alpha})}$ correspondent physiquement à ceux d'un observateur immobile pour lesquels r, θ, ϕ sont constants (Carroll Ch 5).

ii. Calculez les fonctions $c^{\hat{\gamma}}_{\ \hat{\alpha}\hat{\beta}}$ définies en (a).

4. **Base orthonormée naturelle**
   Soit un espace bidimensionnel dont la métrique est donnée par:

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)}\, \mathrm{d}r^2 + r^2 \mathrm{d}\theta^2 \; .$$

   (a) Donnez une expression pour les vecteurs $\hat{e}_{(\hat{\alpha})}$ et les 1-formes dual $\hat{\theta}^{\hat{\beta}}$ de la base orthonormée naturelle (tétrade) associée à ces coordonnées.

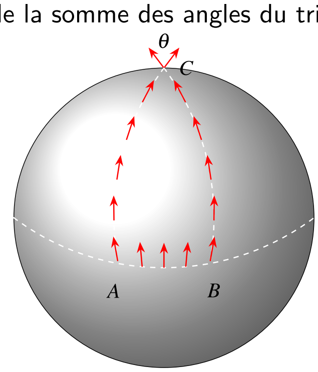
   (b) Existe-t-il une fonction f telle que $\hat{\theta}^{(\hat{r})} = \mathrm{d}f$ et, si oui, quelle est-elle?

   (c) Même question, mais cette fois pour une fonction g telle que $\hat{\theta}^{(\hat{\theta})} = \mathrm{d}g$.

À remettre au plus tard le 5 décembre 2019

Attention: *Tout retard dans la remise des exercices sera pénalisé de 10% par jour de retard.*
Exercices–Série 3

1. **Transport parallèle**
Lorsqu'on se déplace en «ligne droite» sur une sphère, la trajectoire est un grand cercle et il est bien connu que la somme des angles intérieurs de tout triangle sur une sphère dont les côtés sont des arcs de grands cercles dépasse $180°$. Montrer que le changement d'orientation θ d'un vecteur transporté parallèlement autour d'un tel triangle (comme à la figure plus bas pour le parcours $C \to A \to B \to C$) est égale la partie de la somme des angles du triangle qui excède $180°$.



Vecteur transporté parallèlement sur une sphère.

2. **Transport parallèle et géodésique**
   (a) Montrer que si les vecteur A et B sont transportés parallèlement le long d'une courbe, alors $g(A, B) = A \cdot B$ est constant sur la courbe.
   (b) Démontrer alors que si une géodésique est de genre espace (ou genre temps, ou genre lumière) quelque part, elle est de genre espace (ou genre temps, ou genre lumière) partout.

3. **Métrique en $2D$**
Un espace en $2D$ est décrit par la métrique suivante :
$$\mathrm{d}s^2 = -x^2\,\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2$$
Une observatrice se déplace le long d'une trajectoire donnée par $x = 2t$, valable pour $t > 1$.
   (a) Trouvez les composantes de sa quadrivitesse $u^\alpha = \mathrm{d}x^\alpha/\mathrm{d}\tau$ **dans le système de coordonnées** (t, x) [3]? Cette trajectoire est-elle physiquement possible? Pourquoi indique-t-on que la trajectoire est valable pour $t > 1$?
   (b) Obtenez une expression pour les vecteurs de base $\hat{e}_{(\alpha)}$, correspondant au repère orthonormé localement Lorentzien de cette observatrice, en fonction des vecteurs de base $\hat{e}_{(\alpha)}$ correspondant aux coordonnées (t, x).

4. **Trou noir de Schwarzschild**
Une particule tombe radialement vers un trou noir de Schwarzschild à une vitesse $v_p = \sqrt{3}/2$ telle que mesurée localement par Victor, un observateur stationnaire à $(r, \theta, \phi) =$ const. Une observatrice (Blandine), située au même endroit que Victor, se trouve, elle, sur une orbite circulaire stable directe (vitesse selon $\hat{e}_{(\phi)}$), son déplacement angulaire étant donné par $\Omega^2 = (\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t)^2 = GM/r^3$. Victor, Blandine et la particule sont tous dans le plan équatorial $\theta = \pi/2$.
Sachant que les composantes de 4-vitesse dans le repère orthonormé correspondant à α' est donné par $u^{\alpha'} = \mathrm{d}x^\alpha/\mathrm{d}\tau'$, un accent circonflexe (e.g., $u^{\alpha'} = u^{\hat{\alpha}}$) pour dénoter les composantes dans le repère orthonormé de Victor, une barre (e.g., $u^{\alpha'} = u^{\bar{\alpha}}$) pour les composantes dans le repère orthonormé de Blandine et un tilde (e.g. $u^{\alpha'} = u^{\tilde{\alpha}}$) pour le repère orthonormé de la particule.

Obtenez, **dans la base de coordonnées** t, r, θ, ϕ,
   (a) les composantes u_p^α du quadrivecteur vitesse de la particule;

[3] On entend par là que α peut prendre les «valeurs» t ou x.

(b) les composantes u_A^α du quadrivecteur vitesse de Blandine.
NOTE: Pour (a) et (b), on ne doit PAS supposer que la particule était au repos à l'infini avant de tomber radialement.

(c) En supposant que la particule soit partie de l'infini avec une vitesse nulle, obtenez la valeur de r où doit se trouver Victor. Est-ce que la supposition que la particule est partie de l'infini avec une vitesse nulle est compatible avec la donnée du problème? Si ce n'est pas le cas, expliquez brièvement.

5. **Vaisseau spatial**
Vous êtes à bord d'un vaisseau spatial **s'éloignant** d'un trou noir (métrique de Schwarzschild exprimée dans les coordonnées usuelles) le long d'une trajectoire radiale (ce n'est **PAS** une géodésique). On vous demande d'ajuster la vitesse du vaisseau de telle sorte qu'un signal émis à une fréquence ν_0 et dirigé radialement (r croissant) vers un observateur situé à l'infini sera reçu à la même fréquence ν_0. Obtenez une expression pour la vitesse v du vaisseau en fonction de r. On suppose v mesuré par rapport à un observateur stationnaire coincidant avec la position instantanée du vaisseau.

Aide-mémoire

Métriques: $ds^2 = -d\tau^2 = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu$

Minkowski (RR) $(\eta^{\mu\nu}) = (\eta_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$

coord. cart : $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$

coord. sph. : $ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2$

Notation matricielle: $V =$ vecteur, $M =$ tenseur $(1,1)$

$$(V^\mu) = \begin{pmatrix} V^0 \\ V^1 \\ \vdots \end{pmatrix}^{\mu}_{\downarrow}, \quad (M^\mu{}_\nu) = \underset{\nu\rightarrow}{\begin{pmatrix} M^0{}_0 & M^0{}_1 & \cdots \\ M^1{}_0 & M^1{}_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}}^{\mu}_{\downarrow}$$

$\omega =$ 1-forme:$(\omega_\nu) = (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$
$\nu\rightarrow$

alors : $M(\omega, V) = \omega_\nu M^\nu{}_\mu V^\mu = (\omega_\nu)\cdot(M^\nu{}_\mu)\cdot(V^\mu)$

Transf. de Lorentz: $\Delta x^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}{}_\beta\,\Delta x^\beta, \quad \hat{e}_{(\alpha)} = \Lambda^{\beta'}{}_\alpha \hat{e}_{(\beta')}$

$$\Lambda^{\alpha'}{}_\beta = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \left(1 - v^2\right)^{-1/2}$$

4-vitesse, 4-accélération, 4-impulsion, 4-force :

$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau},\ u\cdot u = -1,\ a^\alpha = \frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} = \frac{du^\alpha}{d\tau},\ u\cdot a = 0$

$p^\mu = m u^\mu = (E, p),\ p\cdot p = m^2 u\cdot u = -m^2 = -E^2 + p^2$

$m \neq 0:\ E = \gamma m, \quad p = \gamma m v, \qquad E_{\mathrm{obs}} = -p\cdot u_{\mathrm{obs}}$

$m = 0:\ E = |\mathbf{p}| = h\nu$ (photon)

$f^\mu = m\frac{d^2}{d\tau^2}x^\mu(\tau) = \frac{d}{d\tau}p^\mu(\tau)$

Tenseur énergie-impulsion et flux :

$T^{\mu\nu}_{\text{poussière}} = p^\mu N^\nu = (\rho + p)u^\mu u^\nu + p\eta^{\mu\nu}.$

où $T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}, \quad T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0, \quad N^\alpha{}_{;\alpha} = (n\,u^\alpha)_{;\alpha} = 0$

Vecteurs et formes : Soit $\omega =$ 1-forme et $A =$ vecteur :

$\omega(A) \equiv \langle \omega\,, A\rangle = \omega(A^\alpha \hat{e}_{(\alpha)}) = A^\alpha \omega(\hat{e}_{(\alpha)}) = A^\alpha \omega_\alpha$

$\omega_{\beta'} = \Lambda^\alpha{}_{\beta'}\,\omega_\alpha, \quad A^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}{}_\beta A^\beta, \quad \hat{e}_{(\alpha)} = \Lambda^{\beta'}{}_\alpha \hat{e}_{(\beta')}$

$\hat{\theta}^{(\alpha)}(\hat{e}_{(\beta)}) = \delta^\alpha{}_\beta \qquad \hat{\theta}^{(\alpha')} = \Lambda^{\alpha'}{}_\beta\,\hat{\theta}^{(\beta)}$

$\hat{e}_{(\alpha)} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \partial_\alpha, \quad \hat{\theta}^{(\alpha)} = \mathrm{d}x^\alpha \quad (\mathrm{d} =$ gradient)

$V_\alpha = g_{\alpha\beta}\,V^\beta, \quad V^\alpha = g^{\alpha\beta}\,V_\beta,$

$\frac{d\phi}{d\tau} = \phi_{,\alpha}u^\alpha,\ \phi_{,\alpha} \equiv \frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha} = \partial_\alpha\phi,$

$x^\alpha_{,\beta} \equiv \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} = \delta^\alpha_\beta,\ d\phi = \phi_{,\alpha}dx^\alpha$

$f = f_{\alpha\beta}\,\hat{\theta}^{(\alpha)}\otimes\hat{\theta}^{(\beta)},\ f(\hat{\theta}^{(\alpha)}, \hat{\theta}^{(\beta)}) \equiv f^{\alpha\beta},\ f(\hat{e}_{(\alpha)}, \hat{e}_{(\beta)}) \equiv f_{\alpha\beta}$

$q^\alpha = \langle\hat{\theta}^{(\alpha)}, q\rangle, \quad \sigma_\alpha = \langle\sigma, \hat{e}_{(\alpha)}\rangle$

$b_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,(b_{\alpha\beta} + b_{\beta\alpha}) + \frac{1}{2}\,(b_{\alpha\beta} - b_{\beta\alpha}) = b_{(\alpha\beta)} + b_{[\alpha\beta]}$

$S = S^\beta_{\alpha\gamma}\,\hat{\theta}^{(\alpha)}\otimes\hat{e}_{(\beta)}\otimes\hat{\theta}^{(\gamma)}, \quad S(u,\sigma,v) = S^\beta_{\alpha\gamma}\,u^\alpha\sigma_\beta v^\gamma$

$Q^{\alpha'}_{\beta'} = Q(\hat{\theta}^{(\alpha')}, \hat{e}_{(\beta')}) = Q(\Lambda^{\alpha'}{}_\beta\,\hat{\theta}^{(\beta)}, \Lambda^\nu{}_{\beta'}\,\hat{e}_{(\nu)}) = \Lambda^{\alpha'}{}_\beta\,\Lambda^\nu{}_{\beta'}\,Q^\beta_\nu$

Base orthonormée naturelle et tétrades: $g_{\mu\nu}e^\mu_a e^\nu_b = \eta_{ab},\ g_{\mu\nu} = e^a_\mu e^b_\nu \eta_{ab}$

$\hat{e}_{(\mu)} = e^a_\mu \hat{e}_{(a)},\ \hat{\theta}^{(\mu)} = e^\mu_a \hat{\theta}^{(a)}, \quad e^\mu_a e^a_\nu = \delta^\mu_\nu, \quad e^a_\mu e^\mu_b = \delta^a_b.$

$2D$ polaires: $\hat{\theta}^{(\hat{r})} = dr,\ \hat{\theta}^{(\hat{\theta})} = r\,d\theta,\ \hat{e}_{(\hat{r})} = \hat{e}_{(r)},\ \hat{e}_{(\hat{\theta})} = r^{-1}\hat{e}_{(\theta)}$

Dérivée covariante et symbole de Christoffel:

$\nabla_\beta V^\alpha \equiv V^\alpha{}_{;\beta} \equiv V^\alpha{}_{,\beta} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}\,V^\mu, \quad p_{\alpha;\beta} = p_{\alpha,\beta} - \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\,p_\mu,$

$T^\alpha_{\beta;\gamma} = T^\alpha_{\beta,\gamma} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma}T^\mu_\beta - \Gamma^\mu{}_{\beta\gamma}T^\alpha_\mu$

$\frac{\partial\hat{e}_{(\alpha)}}{\partial x^\beta} \equiv \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\,\hat{e}_{(\mu)}, \quad \frac{D}{d\lambda}V^\alpha = \frac{dx^\beta}{d\lambda}\nabla_\beta V^\alpha = \frac{dV^\alpha}{d\lambda} = V^\alpha{}_{;\beta}u^\beta$

$\Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta} = \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}, \qquad g_{\alpha\beta;\gamma} = 0$ (métrique compatible),

$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\,g^{\alpha\mu}\,(g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu})$

$d\,x^0\,d\,x^1\,d\,x^2\,d\,x^3 = (-g)^{1/2}\,d\,x^{0'}\,d\,x^{1'}\,d\,x^{2'}\,d\,x^{3'}$

Géodésique: ($\lambda = \tau$ pour type temps)

$\frac{D}{d\lambda}\frac{dx^\alpha}{d\lambda} = 0,\ u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \equiv \dot{x}^\alpha,\ \frac{d}{d\lambda} = u^\beta\frac{\partial}{\partial x^\beta}$

$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\lambda}\frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0, \quad u^\mu\nabla_\mu u^\nu = 0, \quad p^\mu\nabla_\mu p^\nu = 0$

$p^\alpha\,p^\beta{}_{;\alpha} = 0 \Rightarrow p^\alpha\,p_{\beta;\alpha} = 0 \Rightarrow m\frac{dp_\beta}{d\tau} = \frac{1}{2}g_{\nu\alpha,\beta}\,p^\nu\,p^\alpha$

Tenseur de Riemann, de Ricci et scalaire de Ricci

$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma{}_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma{}_{\beta\mu}$

$R_{\alpha\beta} = R^\mu{}_{\alpha\mu\beta}, \qquad R = R^\alpha{}_\alpha \qquad g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$

$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu},\ R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}$

Tenseur et éq. d'Einstein

$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\,Rg_{\alpha\beta}, \quad G^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0, \quad G^{\alpha\beta} = 8\pi\,T^{\alpha\beta}$

Schwarzschild (Sch) : avec $\Delta = 1 - \frac{2GM}{r}$

$ds^2\big|_{\text{Sch}} = -\,\Delta\mathrm{d}t^2 + \Delta^{-1}\,\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2)$

Géodésiques: Soit $V(r) = \frac{1}{2}\epsilon - \epsilon\frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GML^2}{r^3}$

$\frac{dt}{d\lambda} = \Delta^{-1}\,E\ , \quad \frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{L}{r^2}\ , \quad \frac{dr}{d\lambda} = \pm[E^2 - 2V(r)]^{1/2}$

Particules $m \neq 0:\ \lambda = \tau,\ \epsilon = 1 =$ type temps

$\frac{dt}{d\tau} = \frac{p^t}{m} = \frac{g^{tt}p_t}{m} = \gamma\ , \quad \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{p^\phi}{m} = \frac{g^{\phi\phi}p_\phi}{m}\ , \quad \frac{dr}{d\tau} = \frac{p^r}{m}$

Photons ou $m = 0:\ \ \epsilon = 0 =$ type nul

$\frac{dt}{d\lambda} = p^t = g^{tt}p_t\ , \quad \frac{d\phi}{d\lambda} = p^\phi = g^{\phi\phi}p_\phi\ ,$

$\frac{dr}{d\lambda} = p^r = \frac{\nu}{\nu_\infty} = \frac{\lambda_\infty}{\lambda} = \Delta^{-1/2}$

Reissner-Nordstrøm (RN) :

$ds^2\big|_{\text{RN}} = ds^2\big|_{\text{Sch}}$ avec $\Delta = 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{G(p^2+q^2)}{r^2}$

Kerr :

$ds^2\big|_{\text{Kerr}} = -\mathrm{d}t^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}\mathrm{d}r^2 + \rho^2\mathrm{d}\theta^2 + (r^2 + a^2)\sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2$
$+ \frac{2GMr}{\rho^2}(a\sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi - \mathrm{d}t)^2$

avec $\Delta = r^2 - 2GMr + a^2$, $\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta$ et $a = J/M$