Physique mathématique II
PHY-1002
Département de Physique, génie physique et optique, Université Laval
SESSION: AUTOMNE 2016
Calendrier des travaux et épreuves

Calendrier: *Vérifiez régulièrement les dates de remise des travaux; elles sont sujet à changement.*

		Date	Pondération/note finale	Matériel couvert
Exercices–Série 1	:	29 septembre 2016	5%	RH&B: Ch. 3
Exercices–Série 2	:	27 octobre 2016	5%	RH&B: Ch. 12-13
Examen 1	:	28 octobre 2016	40%	RH&B: Ch. 3,12,13
Exercices–Série 3	:	24 novembre 2016	5%	RH&B: Ch. 14
Exercices–Série 4	:	15 décembre 2016	5%	RH&B: Ch. 15
Examen 2	:	16 décembre 2016	40%	RH&B: Ch. 14-15

Attention:

- *Vérifiez régulièrement les énoncés; il peut y avoir des corrections de dernière minute et les devoirs sont ajoutés en cours de session.*
- *Tout retard dans la remise des travaux sera pénalisé de 10% par jour de retard.*
- La collaboration est encouragée. Vous pouvez remettre un solutionnaire par équipe de 2 personnes (maximum). Un solutionnaire individuel est aussi accepté.
- Les travaux doivent être remis sous forme papier. Veuillez imprimer (s'il y a lieu), numéroter les pages, et brochez vos solutionnaires!
- 5% des points seront réservés à la qualité de la présentation et à l'exactitude de la langue.

RH&B:
• Mathematical Methods for Physics and Engineering (3e édition), Riley, K.F, Hobson, M.P., Bence, S.J., Cambridge U. Press (New York, 2006) ISBN-13: 978-0521679718 ou ISBN-10: 0521679710
• Solutions des problèmes du livre ci-haut (numéros impairs): Student Solution Manual for Mathematical Methods for Physics and Engineering Paperback (3e édition), Riley, K.F, Hobson, M.P., Cambridge U. Press (New York, 2006) ISBN-13: 978-0521679732 ou ISBN-10: 0521679737
• Diapositives utilisées pendant le cours: disponibles sur **http://feynman.phy.ulaval.ca/marleau/cours.htm** Version pdf imprimable non publique (mot de passe nécessaire). Sujet à des mises à jour fréquentes.

(voir pages suivantes pour les énoncés)

Physique mathématique II
PHY-1002
Département de Physique, génie physique et optique, Université Laval
SESSION: AUTOMNE 2016
Calendrier des travaux et épreuves

À REMETTRE AU PLUS TARD LE 29 SEPTEMBRE 2016

Attention: *Tout retard dans la remise des exercices sera pénalisé de 10% par jour de retard.*
Exercices–Série 1 - Nombres complexes (Chapitre 3 de RH&B)

1. Soit $z = x + iy$ où x et y sont les parties réelle et imaginaire de z respectivement, obtenez, en expliquant votre démarche, x et y en fonction de z et z^* seulement.

2. Écrire les expressions suivantes sous la forme cartésienne ($z = x + iy$): (a) $(1-2i)^3$, (b) $\frac{i}{1-i}$, (c) $\left(\mathrm{Im}\,\frac{3-i}{1+i/2}\right)^2$, (d) $\mathrm{Re}\left(\frac{a+ib}{c+id}\right)$

3. Illustrer, sur le plan complexe, les régions correspondant aux relations suivantes: (a) $|z+i| = |z|+1$, (b) $\mathrm{Im}\left(z^2\right) > 3x$

4. Montrez que $\sinh(x+iy) = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$ en utilisant la représentation de ces fonctions en termes d'exponentielles

5. Écrire les expressions suivantes sous la forme cartésienne: (a) $e^{-2-i\frac{\pi}{4}}$, (b) $\coth\left(-\frac{3\pi}{8}i\right)$

6. Déterminez le module et l'argument (en radians) des valeurs suivantes de z: (a) $z = \frac{1-i}{1+i}$, (b) $z = (1-2i)+(1+i)$

7. Évaluez les formes polaire et cartésienne de (a) z^6 pour $z = -4+3i$, (b) toutes les racines de: $z^{1/4}$ pour $z = -16$.

8. Pour les fonctions $f(z)$ données par les expressions suivantes, déterminez la dérivée $f'(z)$ où elle existe, et la région d'analyticité de $f(z)$: (a) $f(z) = |z| \sin z$, (b) $f(z) = \frac{1}{z^3+1}$

9. Évaluez la partie imaginaire de
$$\left|\frac{\sinh\left((2+4i)^3\right)}{e^{\sqrt{4+i}}}\right|$$

Physique mathématique II
PHY-1002
Département de Physique, génie physique et optique, Université Laval
SESSION: AUTOMNE 2016
Calendrier des travaux et épreuves

À REMETTRE AU PLUS TARD LE 27 OCTOBRE 2016

Attention: *Tout retard dans la remise des exercices sera pénalisé de 10% par jour de retard.*
Exercices–Série 2 - Séries de Fourier et Transformations intégrales (Chapitre 12 et 13 de RH&B)

1. Trouvez la série de Fourier des fonctions $f(x)$ suivantes, dont la pédiode est p
   (a) $f(x) = 1 - \frac{x^2}{4} \quad (-2 < x < 2)$, avec $p = 4$.
   (b) $f(x) = x\,|x| \quad (-1 < x < 1)$, avec $p = 2$.
2. Trouvez la série de Fourier complexe des fonctions $f(x)$ suivantes. Montrez les détails de vos calculs.
   (a) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$
   (b) $f(x) = x \quad \text{si } -\pi < x < \pi$
3. Trouvez la transformée de Fourier des fonctions $f(x)$ suivantes (par intégration, i.e. sans l'aide de tables). Montrez les détails de vos calculs.
   (a) $f(x) = \begin{cases} e^{2ix} & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{pour tout autre } x \end{cases}$
   (b) $f(x) = e^{-|x|} \quad (-\infty < x < \infty)$
   (c) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{pour tout autre } x \end{cases}$
4. Trouvez la transformée de Laplace des fonctions $f(t)$ suivantes (par intégration, i.e. sans l'aide de tables). Montrez les détails de vos calculs.
   (a) $f(t) = (a - bt)^2$ où $a, b =$ constantes.
   (b) $f(t) = e^{-t} \sinh 4t$
5. Étant donné la transformée de Laplace $\bar{f}(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, trouvez la transformée de Laplace inverse des fonctions $\bar{f}(s)$ suivantes. Montrez les détails de votre raisonnement.
   (a) $\bar{f}(s) = \frac{5s+1}{s^2-25}$.
   (b) $\bar{f}(s) = \frac{1}{(s+a)(s+b)}$ où $a, b =$ constantes

Physique mathématique II
PHY-1002
Département de Physique, génie physique et optique, Université Laval
SESSION: AUTOMNE 2016
Calendrier des travaux et épreuves

À REMETTRE AU PLUS TARD LE 24 NOVEMBRE 2016

Attention: *Tout retard dans la remise des exercices sera pénalisé de 10% par jour de retard.*
Exercices–Série 3- EDO d'ordre 1 **(**Chapitre 14 de RH&B)

1. Trouvez la solution générale des équations différentielles suivantes en utilisant la méthode suggérée:
   (a) $y' - y\tan x = 6$ avec la **méthode du facteur d'intégration étape par étape**. Note: considérez un intervalle où $\tan x$ est continu, par exemple $\pi/2 < x < 3\pi/2$;
   (b) $y' - 4y = 8$ avec la **méthode de la variation de paramètre**, c'est-à-dire, trouvez la solution homogène et variez le paramètre.

2. Pour chacune des équations différentielles avec condition initiale, (i) trouvez la solution, (ii) déterminez son intervalle de validité et (iii) illustrez la solution $y(x)$ en sur un graphique.
   (a) $xy' + y = 6x^2$ avec $y(2) = 2$;
   (b) $xy' + 2y = x + 2$ avec $y(-1) = 1$;
   (c) $y' = 6\frac{y \ln y}{x}$ avec $y(1) = e$ en utilisant la **méthode de séparation des variables**.

3. Trouvez la solution de l'équation différentielle $y' = \left(6x^2 + 1\right) / (y - 1)$ soumise à la condition initiale $y(0) = 4$.

4. Soit l'équation $y' = f(\frac{y}{x})$.
   (a) Donnez un exemple de fonction f pour laquelle (i) l'équation est séparable (ii) l'équation n'est pas séparable.
   (b) Démontrez qu'un changement de la variable dépendante, notamment $w(x) = y(x)/x$, permet de réexprimer l'équation différentielle en une équation séparable.

5. Effectuez un changement de la variable dépendante de la forme $w(x) = y(x)/x$ pour séparer les variables et trouvez la solution de l'équation différentielle
$$y' = \frac{xy + 2y^2}{x^2}.$$

6. Montrez que l'équation suivante est exacte et trouvez la solution générale et une solution particulière correspondant à la condition initiale donnée
$$(e^y + z)\,dy - (\sin z - y)\,dz = 0 \qquad \text{avec } z(0) = 0.$$

7. Montrez que l'équation $e^{2y}dx - \tan x \; dy = 0$ n'est pas exacte et qu'il n'existe pas de facteur d'intégration dépendant de x ou de y seulement qui permette de résoudre l'équation. Malgré tout, trouvez par inspection un facteur d'intégration pertinent et utilisez-le pour obtenir la solution générale.

8. Trouvez la solution générale de chacune des équations différentielles suivantes en identifiant clairement le type d'équation ou les méthodes de solution que vous utilisez.
   (a) $y'\sqrt{x^2+1} + xy - x = 0$;
   (b) $\cos x \cos y + \sin^2 x - y' \cos^2 y - y' \sin x \sin y = 0$.

Physique mathématique II
PHY-1002
Département de Physique, génie physique et optique, Université Laval
SESSION: AUTOMNE 2016
Calendrier des travaux et épreuves

À REMETTRE AU PLUS TARD LE 15 DÉCEMBRE 2016

Attention: *Tout retard dans la remise des exercices sera pénalisé de 10% par jour de retard.*
Exercices–Série 4 - EDO d'ordre $n \geq 2$ **(**Chapitre 15 de RH&B)

1. Soient deux fonctions $y_1(x) = x^2$ et $y_2(x) = x^2 \ln x$ et l'équation différentielle $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$.
   (a) Vérifiez que les fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont des solutions de l'équation différentielle sur l'intervalle $x > 0$.
   (b) Déterminez si le test du *Wronskien* $W(y_1, y_2)$ vous permet de dire si les fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont linéairement indépendantes ou non sur l'intervalle.
   (c) Selon un autre théorème, si une des fonctions peut-être exprimée comme le produit d'une constante scalaire avec l'autre fonction, alors les fonctions sont linéairement dépendantes. Déterminez si c'est le cas.
2. Soient les fonctions $y_1(x) = \sinh 3x$ et $y_2(x) = 2\cosh 3x$ et l'équation différentielle $y'' - y = 0$. Déterminez si les fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ forment une base de solutions linéairement indépendantes
3. Dites si les ensembles de fonctions suivants sont linéairement dépendants ou indépendants et faites-en la démonstration.
   (a) $\{\pi; 1/e; 0.3\}$
   (b) $\{e^x; e^{2x} \sinh x\}$
   (c) $\{e^x; e^{2x} \cosh x; e^{3x}\}$
4. **Racines distinctes**: Soient l'équation différentielle $y''' - y'' + 2y' = 0$ et les conditions initiales $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.
   (a) Trouvez la solution générale de l'équation différentielle.
   (b) Trouvez la solution particulière de l'équation différentielle satisfaisant les conditions initiales.
5. **Racines répétées:** Soient l'équation différentielle $y''' = 0$ et les conditions initiales $y(0) = 3$, $y'(0) = -5$ et $y''(0) = 1$.
   (a) Trouvez la solution générale de l'équation différentielle.
   (b) Trouvez la solution particulière de l'équation différentielle satisfaisant les conditions initiales.
6. **Racines complexes:** Trouvez la solution générale de l'équation différentielle $y''' + iy' = 0$. Indice: $\sqrt{-i} = \pm(1-i)/\sqrt{2}$.